NOŢIUNI ELEMENTARE DESPRE MULŢIMILE FUZZY ŞI LOGICA FUZZY

1. NECESITATEA INTRODUCERII MULŢIMILOR FUZZY

În cazul mulţimilor clasice (booleene), are loc o trecere netă, abruptă, de la apartenenţa la neapartenenţa unui element la mulţimea considerată, în sensul că un element x poate să aparţină sau nu unei anumite mulţimi A, o altă variantă neputând fi luată în consideraţie. Faptul că propoziţia "x aparţine lui A" este adevărată se notează prin 1, iar faptul că este falsă se notează prin 0.

Valorile 1 şi 0 reprezintă ***valoarea de adevăr*** a propoziţiei respective.

În general, dându-se o propoziţie S, valoarea sa de adevăr se notează prin t(S), cu

$$t(S) \in [0,1] \tag{1}$$

Fie mulţimea U, numită ***mulţime univers***, sau ***mulţime totală***, şi fie A o submulţime a sa.

$$A \subseteq U \tag{2}$$

Notăm prin A^C complementara submulţimii A faţă de U. Atunci nu există decât două posibilităţi :

$$x \in A \tag{3}$$

$$x \notin A \qquad \text{adică} \qquad x \in A^C \tag{4}$$

ceea ce este coerent cu relaţiile

$$A \cap A^C = \varnothing \tag{5}$$

$$A \cup A^C = U \tag{6}$$

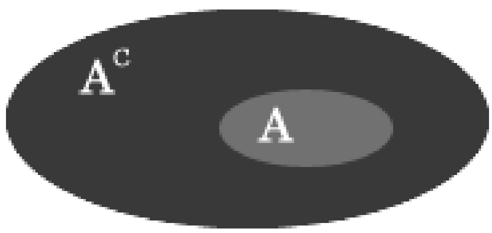


Figura 1 O submulţime şi complementara sa în teoria clasică a mulţimilor

Logica clasică s-a conformat acestor relaţii. Astfel, încă în antichitate, Aristotel a formulat cele trei “Legi ale gândirii” (ale logicii) :

- Legea necontradicţiei $A \cap A^C = \varnothing$
- Legea terţiului exclus $A \cup A^C = U$
- Legea identităţii $A = A$

Conform celor arătate până acum, dacă propoziţia S este adevărată, avem t(S)=1, iar pentru opusa acestei propoziţii, notată prin ***not S***, avem

$$t(not\ S) = 0 = 1 - 1 = 1 - t(S)$$

iar dacâ propoziţia S este falsă, avem t(S)=0, iar pentru opusa sa avem

$$t(not\ S) = 1 = 1 - 0 = 1 - t(S)$$

adică, oricare ar fi valoarea de adevăr a unei propoziţii, avem realţia

$$t(not\ S) = 1 - t(S) \qquad (7)$$

Să luăm însă un exemplu (amuzant, în aparenţă) formulat de Bertrand Russel : Într-un oraş este un singur bărbier, pe a cărui firmă stă scris “Bărbierul bărbiereşte pe oricine nu se bărbiereşte singur”; se pune întrebarea “Cine-l bărbiereşte pe bărbier?”

Fie S propoziţia “Bărbierul se bărbiereşte singur”; deci not S este propoziţia “Bărbierul nu se bărbiereşte singur”.

Este uşor de observat că presupunerea că una dintre propoziţii este adevărată conduce la concluzia că este adevărată opusa sa. Deci :

$$S \Rightarrow not\ S \qquad (8)$$
$$not\ S \Rightarrow S \qquad (9)$$

adică

$$S \Leftrightarrow not\ S \qquad (10)$$

şi, utilizând relaţia (7), obţinem :

$$t(S) = t(not\ S) = 1 - t(S) \qquad (11)$$

ceea ce ne conduce la concluzia

$$t(S) = 1/2 \qquad (12)$$

valoare de adevăr echidistantă faţă de adevărat şi fals, neacceptată de logica clasică, dar obţinută cu ajutorul arsenalului logicii clasice. Numim aceasta “Paradoxul punctului mijlociu”.

Ca o alternativă la logica clasică, bivalentă, s-au propus logici multivalente, cum ar fi, de exemplu, logicile Lukasiewicz, în care variabilele logice pot lua valori nu numai numai în mulţimea $M_2=\{0,1\}$, ci într-o mulţime M_n, unde

$$M_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\} \tag{13}$$

unde n>2, cu p valori de fals, q valori de nesiguranţă (incertitudine, îndoială, posibilitate) şi cu n-(p+q) valori de adevăr.

Într-o logică trivalentă, de exemplu, o propoziţie nu mai este evaluată simplu ca "adevărată" sau "falsă", ci "adevărată în raport cu …", deci în raport cu un alt fapt.

Logica fuzzy poate fi considerată ca un caz extins de logică multivalentă, în care variabilele logice pot lua orice valoare reală în intervalul [0,1].

În cazul mulţimilor fuzzy, nu mai are loc tranziţia netă de la apartenenţă la neapartenenţă, ci există grade de apartenenţă intermediare, care sunt definite de o funcţie de apartenenţă în intervalul [0,1]; aceste grade de apartenenţă intermediare reflectă ***posibilitatea*** sau ***incertitudinea*** aferentă adevărului unei propoziţii. Acestă trecere gradată de la "adevărat" la "fals" este reflectată de trecerea gradată de la submulţimea A la A^C.

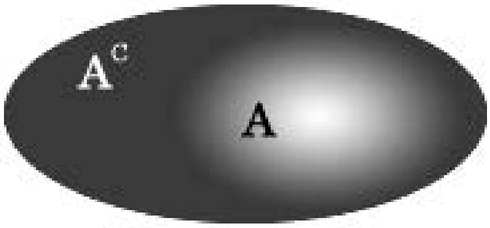


Figura 2 O mulţime şi complementara sa în cazul mulţimilor fuzzy

Este acum foarte greu de spus dacă un element x aparţine lui A sau lui A^C.

Rezultatul din relaţia (12), aberant în cazul abordării clasice a teoriei mulţimilor, se poate acum simplu exprima : este "posibil" ca propoziţia S ("Bărbierul se bărbiereşte singur") să fie adevărată, relaţia (11) arătând că este la fel de posibil să fie şi falsă. Cazul $t(S) = 1/2$ este un caz particular important, reflectând, aşa cum vom vedea ulterior, aşa-numitul punct de ***traversare***.

Logica fuzzy se constituie deci într-o modalitate de a descrie incertitudinea, fiind o alternativă la descrierea probabilistică.

Există, într-adevăr câteva similitudini între "probabilitate" şi "vaguitate" :

- ambele descriu gradul de incertitudine prin valori reale din intervalul [0,1]
- în ambele abordări, combinarea mulţimilor şi a propoziţiilor se face în mod asociativ, comutativ şi distributiv.

Există însă şi deosebiri, deosebirea esenţială dintre caracterul fuzzy şi caracterul aleator constând în modul în care sistemele vagi (fuzzy) şi sistemele aleatoare tratează o submulţime A şi complementara sa ("opusa").

În logica booleeană, dacă $x \in A$, atunci $x \notin A^C$, ceea ce înseamnă că $A \cap A^C = \emptyset$.

Teoria probabilităţii s-a conformat acestui principiu :

$$P(A \cap A^C) = P(\varnothing) = 0 \quad (14)$$

deoarece, din punct de vedere probabilistic, $A \cap A^C$ este un eveniment imposibil.

Vaguitatea (caracterul fuzzy) începe când se consideră că $A \cap A^C \neq \varnothing$.

Vaguitatea şi sistemele fuzzy descriu incertitudinea prin intermediul ambiguităţii caracterului unui eveniment, măsurând nu dacă un eveniment apare sau nu, ci posibilitatea de apariţie (folosim deci termenul de "posibil" în loc de "probabil", caracteristic teoriei probabilităţilor).

Vaguitatea este, deci, un tip de incertitudine deterministă.

Fie exemplul unei figuri distorsionate, care "pare" să fie o elipsă. Din punctul de vedere al logicii fuzzy, răspunsul la întrebarea "Ce figură geometrică este aceasta ?", răspunsul corect este : "Este POSIBIL să fie o elipsă" (nu PROBABIL).

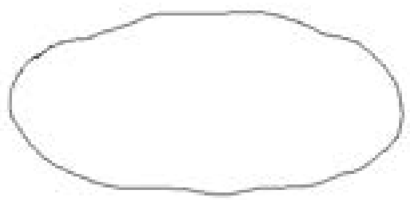


Figura 3 Elipsă fuzzy

În practică, cele două caractere (caracterul aleator, descris de teoria probabilităţii, şi care conduce la o siateme aleatoare, şi caracterul fuzzy, descris de o "teorie a posibilităţii", adică de teoria mulţimilor fuzzy, şi care conduce la sisteme fuzzy), se combină adeseori.

Caracteristica de bază a mulţimilor fuzzy este trecerea gradată de la A la A^C, ceea ce conduce la faptul că vom avea :

$$A \cap A^C \neq \varnothing \quad (15)$$
$$A \cup A^C \neq U \quad (16)$$

Principalele motive care au condus la necesitatea introducerii teoriei mulţimilor fuzzy şi a logicii fuzzy sunt :

- În ultimii ani, complexitatea sistemelor şi a fenomenelor a crescut considerabil, scăzând posibilitatea de descriere prin relaţii precise a acestor sisteme şi fenomene (nu se pot elabora relaţii precise şi totodată relevante, semnificative, de la un anumit grad de complexiatate precizia şi semnificaţia excluzându-se reciproc);
- Gândirea umană foloseşte cu succes, pe lângă logica bivalentă, o logică de tip vag, având capacitatea de a rezuma, concentra informaţiile, caracterizându-le prin intermediul unor aproximări care extrag din ansamblul datelor pe cele importante pentru adoptarea unei decizii (sau concluzii) corecte.

Abordarea care permite vaguitatea (caracterul fuzzy), deci un anumit grad de imprecizie şi adevăruri parţiale, se caracterizează prin folosirea unor variabile lingvistice (exprimate prin limbaj natural), un rol major având înţelesul acestor variabile şi prin caracterizarea relaţiilor simple dintre aceste variabile cu ajutorul propoziţiilor condiţionale de tipul ***IF-THEN-ELSE*** şi prin caracterizarea relaţiilor complexe cu ajutorul algoritmilor fuzzy.

De fapt, latura formală a unui raţionament (aferentă logicii booleene) şi latura semantică sunt reunite prin valoarea de adevăr.

2. MODELAREA MATEMATICĂ A MULŢIMILOR FUZZY

Proprietatea creierului uman de a rezuma informaţiile prin aproximări care extrag elementele semnificative – pentru efectuarea unei activităţi – se manifestă, în special prin folosirea limbajului natural.

Într-un asemenea limbaj, L, un anumit cuvânt poate fi considerat ca descrierea rezumată a unei submulţimi fuzzy A(x) din cadrul unei mulţimi totale T (mulţimea totală, sau mulţimea univers), submulţimea A(x) reprezentând înţelesul, semnificaţia, cuvântului respectiv.

În acest sens, substantivul “greutate” poate fi considerat ca o variabilă ale cărei valori “mare”, “mijlocie”, “mică”, “enormă”, “infimă”, etc, pot fi interpretate ca etichete ale unor submulţimi fuzzy din mulţimea totală aferentă greutăţilor unor produse, variabila “greutate” fiind, în acest caz, “variabila fuzzy”.

Se remarcă faptul că orice valoare exprimată în limbaj natural prin eticheta unei submulţimi fuzzy este mult mai puţin precisă decât valoarea numerică a greutăţii produsului respectiv, obţinută prin mijloace tehnice de măsurare.

Dacă valoarea este exprimată prin propoziţii, ansambluri de cuvinte (“mare dar nu foarte mare”, “relativ mare”, etc.), variabila este numită “variabilă lingvistică”, asemenea variabile caracterizând aproximativ (dar sugestiv) fenomene complexe sau incomplet definite.

Principala caracterizare a elementelor unei mulţimi fuzzy este reprezentată de ***funcţia de apartenenţă*** a elementului, exprimând gradul de apartenenţă la mulţimea respectivă.

Astfel, o submulţime fuzzy A din mulţimea totală T este caracterizată de funcţia de aprtenenţă, notată $\mu_A(x)$, care asociază fiecărui element x din Tun număr $\mu_A(x)$din intervalul [0,1]

$$\mu_A(x) \in [0,1] \tag{17}$$

Prin ***suportul unei submulţimi fuzzy*** A, notat S_A înţelegem totalitatea elementelor x din T, pentru care are loc condiţia

$$\mu_A(x) > 0 \tag{18}$$

Să remarcăm că suportul S_A, al submulţimii A ***NU*** este o submulţime fuzzy, ci o submulţime în sensul clasic a mulţimii totale T.

Exemplul 1 :

Să considerăm mulţimea totală

$$T = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \tag{19}$$

şi A(x) submulţimea fuxxy determinată de eticheta “mic” (deci A(x) este totalitatea elementelor mici din T).

Va trebui să vedem “cât de mic” este fiecare dintre elementele lui T, pentru a putea spune care este gradul de apartenenţă al fiecărui element la submulţimea A(x). Acest lucru este la aprecierea noastră, rezultând un anume grad de subiectivism. Pe de altă parte, acesta conduce la creşterea rolului decidentului uman. Să presupunem că am considerat că aceste grade de apartenenţa sunt :

$\mu_A(1)=1$ (considerăm că în mulţimea {1,2,…,15} 1 este sigur mic (fiind cel mai mic), deci îi acordăm gradul de aprtenenţă 1 la – cel mai mare posibil – la submulţimea numerelor mici din T); $\mu_A(2)=0.8$, $\mu_A(3)=0.6$, $\mu_A(4)=0.4$, $\mu_A(5)=0.2$, $\mu_A(6)=\mu_A(7)=\ldots=\mu_A(15)=0$ (considerând că numerele de la 6 la 15 nu mai pot fi considerate mici). Vom nota acest lucru :

$$A(x)=\left\{\frac{1}{1},\frac{0.8}{2},\frac{0.6}{3},\frac{0.4}{4},\frac{0.2}{5}\right\} \tag{20}$$

într-o reprezentare care ne arată atât elementul submulţimii A (dedesubt), cât şi gradul de apartenenţă al fiecărui element la această submulţime (deasupra). Subliniem că este vorba de o notaţie specifică, deci, în nici un caz nu trebuie interpretat ca având de-a face cu fracţii !

N-am mai reprezentat elementele de la 6 până la 15, pentru care gradul de apartenenţă este 0 (deci care sigur NU fac parte din submulţimea A(x) a numerelor mici din T).

Suportul S_A al mulţimii A este mulţimea elementelor din T care satisfac relaţia (18), deci vom avea :

$$S_A=\{1,2,3,4,5\} \tag{21}$$

şi, în mod evident,

$$S_A\subset T \tag{22}$$

deci A(x) este o submulţime fuzzy a lui T (despre elementele sale putem spune că au un anumit grad de aprteneţă la A(x)), iar S este o submulţime booleeană a lui T.

În mod analog am putea defini submulţimea B(x) a numerelor “mijlocii” din T :

$$B(x)=\left\{\frac{0.2}{4},\frac{0.4}{5},\frac{0.6}{6},\frac{0.8}{7},\frac{1}{8},\frac{0.9}{9},\frac{0.7}{10},\frac{0.5}{11},\frac{0.3}{12},\frac{0.1}{13}\right\} \tag{23}$$

pentru care obţinem suportul

$$S_B=\{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \tag{24}$$

respectiv submulţimea C(x) a elementelor “mari” din T :

$$C(x)=\left\{\frac{0.01}{10},\frac{0.1}{11},\frac{0.3}{12},\frac{0.6}{13},\frac{0.8}{14},\frac{0.9}{15}\right\} \tag{25}$$

cu suportul

$$S_C=\{10,11,12,13,14,15\} \tag{26}$$

Valorile date gradelor de apartenenţă scot în evidenţă caracterul subiectiv al gradului de apartenenţă.

Câteva valori particulare ale gradului de apartenenţă au semnificaţii aparte:

- valoarea ***0*** indică certitudinea neapartenenţei la submulţimea respectivă; este clar că oricâte elemente pot avea gradul de apartenenţă 0 (ele nici nu se mai trec, ca şi în cazul mulţimilor booleene); dacă toate elementele unei submulţimi au gradul de apartenenţă 0 la o submulţime, avem de-a face cu ***mulţimea vidă***;
- valoarea ***1*** indică certitudinea aprtenenţei la submulţimea respectivă; deasemenea, oricăte elemente pot avea gradul de aparteneţă 1 la submulţimea respectivă; dacă toate elementele unei submulţimi au gradul de aparteneţă 1, avem de a face cu o submulţime în sensul clasic (este important faptul că mulţimile booleene se regăsesc deci ca un caz particular al mulţimilor vagi); elementul care are gradul de aparteneţă 1 poartă numele de ***punct de vaguitate minimă***;
- valoarea ***1/2*** este un caz special : pentru un element care are un grad de aparteneţă $\mu<1/2$ la o submulţime se poate spune că "mai curând nu aparţine" acelei submulţimi, iar în cazul $\mu>1/2$ că "mai curând aparţine" submulţimii; în cazul $\mu=1/2$ este clar că este la fel de posibil ca elementul să aparţină sau să nu aparţină submulţimii; un astfel de element se numeşte ***punct de traversare*** al submulţimii.

Dacă o submulţime fuzzy are ca suport un singur element x din T, atunci această submulţime este denumită ***unicat vag*** (fuzzy singleton).

În exemplele e submulţimi fuzzy prezentate în (20), (23), (25), mulţimile A(x), B(x), C(x) erau submulţimi fuzzy ale unei mulţimi totale T (19), care nu era fuzzy.

Am văzut însă că putem considera mulţimile booleene ca un caz particular de mulţimi fuzzy, toate elementele având gradul de apartenenţă 1. Ca urmare, toate elemetele submulţimii fuzyy s-au caracterizat prin faptul că gradele de aparteneţă la submulţimea fuzzy respectivă era mai mic (cel mult egal) decât gardul de aparteneţă la mulţimea totală (la mulţimea în care submulţimea era inclusă).

În acest fel se poate defini şi aparteneţa unei submulţimi fuzzy G(x) la o mulţime fuzzy H(x) : G(x) este o submulţime fuzzy a mulţimii fuzzy H(x) dacă şi numai dacă gradul de apartenenţă al oricărui element din G(x) este mai mic sau egal cu gradul de apartenenţă al respectivului element la mulţimea H(x).

$$G(x) \subset H(x) \Leftrightarrow \forall x \in G(x),\ \mu_G(x) \le \mu_H(x) \tag{27}$$

Se regăsesc astfel, ca un caz particular, toate cele definite până acum.

Acest lucru poate fi arătat şi intuitiv : în relaţia (25) am definit submulţimea C(x) a numerelor "mari" din T (cu T din (20)); să definim încă o submulţime, D(x) a numerelor "foarte mari" din T. Evident, orice număr este mai curând "mare" decât "foarte mare". Am putea avea, de exemplu :

$$D(x) = \left\{ \frac{0.01}{11}, \frac{0.1}{12}, \frac{0.4}{13}, \frac{0.6}{14}, \frac{0.8}{15} \right\} \tag{28}$$

Pe de altă parte, este la fel de evident că mulţimea numerelor "foarte mari" este inclusă în mulţimea numerelor "mari" (orice numă "foarte mare" este un număr "mare", dar nu orice număr "mare" este şi "foarte mare").

Avem deci

$$D(x) \subset C(x) \tag{29}$$

şi
$$\mu_D(x) < \mu_C(x) \quad \forall x \in D(x) \tag{30}$$

aşa cum definisem formal în (27).

În toate exemplele de până acum, suportul mulţimilor fuzzy considerate a fost o mulţime discretă, dar, în cazul general, suportul unei mulţimi fuzzy poate fi o mulţime continuă. Este suficient ca în locul primelor 15 numere naturale ca în (20) să luăm intervalul [1,15] de pe dreapta reală

$$T = [1,15] \tag{31}$$

În cazul unui suport continuu şi functia de apartenenţă este, evident, continuă şi deci poate fi reprezentată grafic.

Fie A(x), B(x), C(x) mulţimile numerelor "mici", "mijlocii", respectiv "mari" din T(x), cu din (31). Reprezentările grafice sunt date în Figura 1.

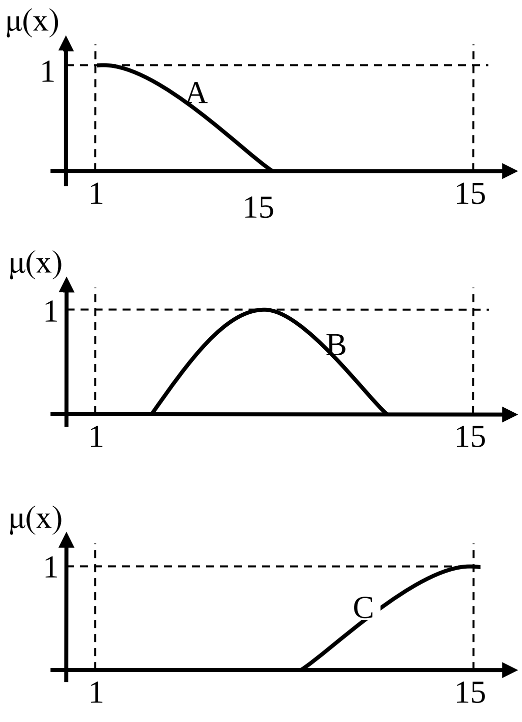


Figura 4 Trei submulţimi vagi cu suport continuu

Totuşi, cum mai putem acorda gradul de apartenenţă unui element oarecare, având, de data aceasta, un număr infinit de elemente ?

În literatura de specialitate s-au conturat, în principal, două direcţii :

- aproximarea neliniară
- aproximarea liniară

<u>În cazul neliniar</u>, s-a propus relaţia simetrică

$$\mu(x) = \frac{1}{1 \pm [a(x-c)]^b} \tag{32}$$

cu "+" în dreapta punctului de vaguitate minimă şi "-" în stânga sa.

Relaţia (32) prezintă avantajul că permite impunerea uşoară a punctului de vaguitate minimă (x_m) şi a punctelor de traversare (x_t).

Astfel, dacă dorim ca punctul de vaguitate minimă să aibă valoarea dorită x_m, este suficient să punem

$$c = x_m \tag{33}$$

obţinând

$$\mu(x) = \frac{1}{1 \pm [a(x-x_m)]^b} \tag{34}$$

Atunci, în punctul $x=x_m$ vom avea gradul de apartenenţă

$$\mu(x_m) = \frac{1}{1 \pm [a(x_m-x_m)]^b} = 1 \tag{35}$$

Cu valoarea c odată impusă, putem acum să alegem valoarea dorită x_t pentru punctele de traversare (puncte pentru care trebuie să avem gradul de apartenenţă 0.5); trebuie deci să avem

$$\mu(x_t) = \frac{1}{1 + [a(x_t-x_m)]^b} = \frac{1}{2} \tag{36}$$

(pentru partea dreaptă); rezultă că este necesar ca

$$a(x_t - x_m) = 1 \tag{37}$$

adică

$$a = \frac{1}{x_t - x_m} \tag{38}$$

un punct de traversare fiind deci la

$$x_t = x_m + \frac{1}{a} \tag{39}$$

sau, în general, dac (dacă nu am impus încă valoarea lui c)

$$x_t = c + \frac{1}{a} \tag{40}$$

Avem, bineînţeles, două puncte de traversare (aşa cum este arătat în Figura 5); fie ele x_{t1} şi x_{t2}.

Odată ales unul dintre ele, celălalt rezultă de la sine.

O altă alegere pentru punctele de traversare conduce la “diluarea” (depărtarea punctelor de traversare) sau la “concentrarea” (apropierea punctelor de traversare) curbei.

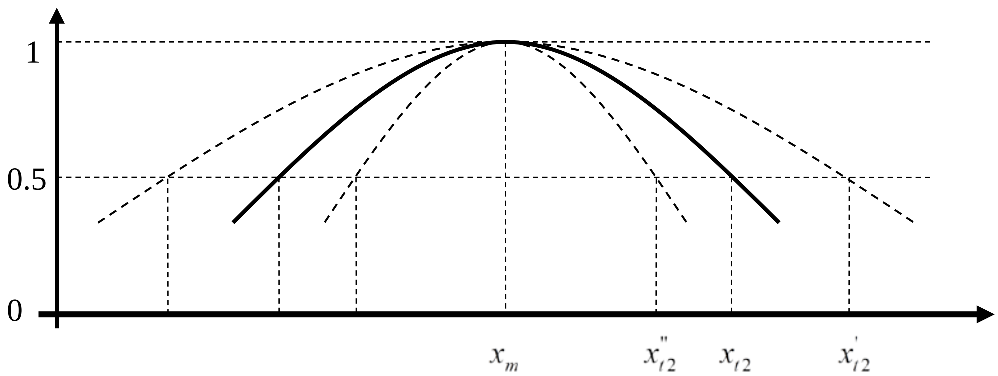


Figura 5 Rolul parametrului c
Diluare şi concentrare

Să considerăm două puncte x_1 şi x_2 în jurul valorii x_t=c+1/a şi anume

$$x_1 = c + \frac{1}{2a} \tag{41}$$

$$x_2 = c + \frac{2}{a} \tag{42}$$

Din relaţia (32) avem

$$\mu_1 = \mu(x_1) = \mu\left(c + \frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{1 + \left[a\left(c + \frac{1}{2a} - c\right)\right]^b} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^b} \tag{43}$$

$$\mu_2 = \mu(x_{21}) = \mu\left(c + \frac{2}{a}\right) = \frac{1}{1 + \left[a\left(c + \frac{2}{a} - c\right)\right]^b} = \frac{1}{1 + (2)^b} \tag{44}$$

Relaţiile (43) şi (44) arată rolul parametrului b (Figura 5) : observăm ca dacă am impus valorile x_t şi x_m, avem o infinitate de curbe care trec prin punctele (x_m, 1) şi (x_t, 1/2), în funcţie tocmai de valoarea parametrului b (Figura 6). Dacă alegem $b=b_1$, obţinem curba reprezentată continuu. Pentru o valoare $b=b_2>b_1$, realţiile (43) şi (44) arată că valorile funcţiei de apartenenţă cresc între punctele de traversare, faţa de valorile corespunzătoare cazului $b=b_1$, obţinând curba reprezentată punctat. Cu alte cuvinte, creşte ***contrastul*** dintre punctele din interiorul punctelor de traversare faţă de punctele situate în afara punctelor de traversare. Din acest motiv, parametrul b poartă denumirea de "parametru de contrast" sau "parametru pentru intensificarea contrastului". Operaţia inversă creşterii contrastului se numeşte "diminuarea contrastului.

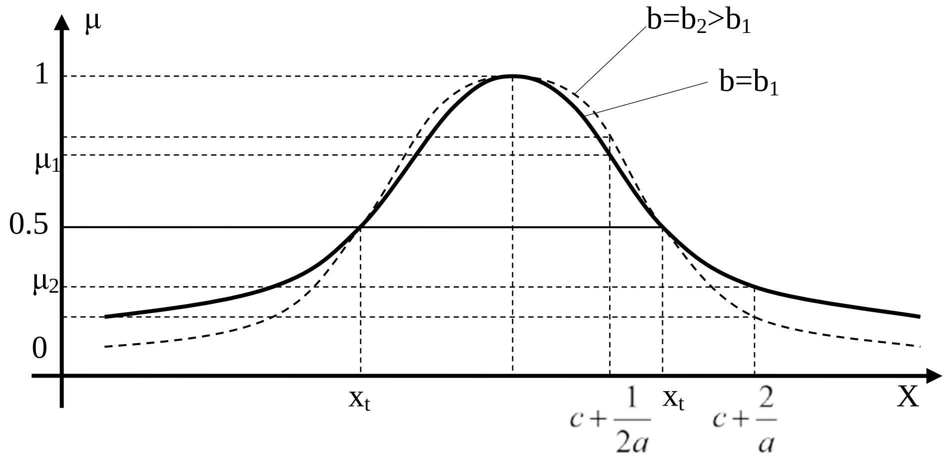


Figura 6 Rolul parametrului c
Intensificarea contrastului

Intensificarea sau diminuarea a contrastului va interveni ulterior, în legătură cu operaţiile care se pot defini pe mulţimile fuzzy.

Este de remarcat faptul că este o mare deosebire între operaţiile de diluare şi concentrare (la care este afectată ***poziţia*** punctelor de traversare) şi operaţiile de intensificare sau diminuare a contrastului (care se referă la curbe care trec prin aceleaşi puncte de traversare).

Cazul liniar

A doua direcţie de stabilire a curbei unei funcţii de apartenenţă foloseşte o aproximare liniară. În acest caz nu se mai acceptă decât două variante opuse de propoziţii care definesc submulţimile (de exemplu, nu vom mai avea decât etichetele "mic" şi "mare"; nu se mai pot accepta etichete de tipul "mijlociu", "mare, dar nu foarte mare", etc.).

Pentru aproximaţia liniară avem nevoie de două puncte prin care trece dreapta; acestea sunt :

- abscisa de vaguitate minimă ($\mu(x)=1$)
- limita suportului ($\mu(x)=0$)

În Figura 7 sunt reprezentate două funcţii liniare ade apartenenţă, corespunzătoare etichetelor “mic”, respectiv “mare”.

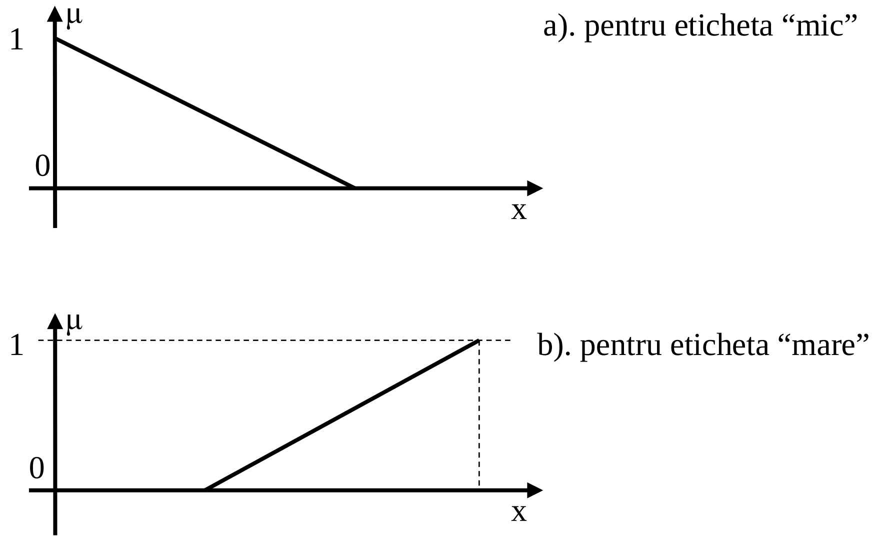


Figura 7 Funcţii liniare de apartenenţă

În cazul submulţimilor fuzzy cu suport continuu, funcţia continuă de apartenenţă poate fi discretizată şi, în acest fel, în locul reprezentării grafice a curbelor se folosesc tabele în care intervin valorile x selectate prin discretizarea suportului şi valorile μ(x) corespunzătoare.

În unele situaţii, chiar gradul de apartenenţa la o submulţime fuzzy este, el însuşi, o submulţime vagă. Astfel, considerând o mulţime totală T_1 de materiale şi submulţimea fuzzy etichetată prin “fragil”, cu elementele x_1, x_2, …, x_n (acestea fiind produse), prezentarea submulţimii fuzzy “fragil” sub o formă sismilară cu cea din relaţia (20) poate avea aspectul :

$$\text{"}fragil\text{"} = \left\{ \frac{\text{"}redus\text{"}}{x_1}, \frac{\text{"}mediu\text{"}}{x_2}, \frac{\text{"}ridicat\text{"}}{x_3}, \cdots \right\} \quad (45)$$

în care gradele de aparteneţă exprimate prin indicii de fragilitate (“redus”, “mediu”, “ridicat”, etc.) sunt submulţimi ale unei alte mulţimi totale T_2, cuprinzând gama posibilă a indicilor de fragilitate pentru produsele x_1, x_2, …x_n.

3. OPERAŢII PE MULŢIMI FUZZY

Operaţiile pe mulţimi fuzzy permit formalizarea relaţiilor fuzzy şi a regulilor de compunere a acestor relaţii în cadrul procesului de efectuare a inferenţelor.

3.1 REUNIUNEA

În cazul booleean, reuniunea a două mulţimi, A şi B este definită ca fiind mulţimea elementelor care aparţin cel putin uneia dintre cele două mulţimi

$$T = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \tag{46}$$

şi submulţimile

$$F = \{1,2,3,4,5\} \tag{47}$$
$$G = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \tag{48}$$
$$H = \{11,12,13,14,15\} \tag{49}$$

Reuniunea a două mulţimi booleene F şi G este definită ca fiind mulţimea elementelor care aparţin cel puţin uneia dintre cele două mulţimi (***SAU nedisjunctiv***)

$$R = F \cup G = \{x \mid x \in F \quad SAU \quad x \in G\} \tag{50}$$

Conform definiţiei (50), vom avea, pentru exemplele din (47), (48) şi (49) :

$$F \cup G = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \tag{51}$$
$$G \cup H = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \tag{52}$$
$$F \cup H = \{1,2,3,4,5,10,11,12,13,14,15\} \tag{53}$$

După cum am văzut anterior, putem privi mulţimile booleene ca fiind un caz particular de mulţimi vagi, pentru care toate elementele au gradul de apartenenţă 1.

În această accepţiune, relaţia (50) poate fi sintetizată în Tabelul 1 :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in R = A \cup B$
$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_R(x) = \mu_{A \cup B}(x)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabelul 1

şi observăm că, pentru un element oarecare x, vom avea $\mu_R(x) = \mu_{F \cup G}(x) = \max[\mu_F(x), \mu_G(x)]$ (deoarece max[0,0]=0, max[0,1]=1, max[1,0]=1, max[1,1]=1).

Această relaţie va rămâne valabilă şi în cazul mulţimilor fuzyy. Într-adevăr, în cazul mulţimilor fuzzy, gradul de apartenentă al unui element la o mulţime fuzzy reprezintă “posibilitatea” ca elementul să aparţină mulţimii fuzzy respective (sau “gradul de adevăr” pe care îl are propoziţia fuzzy care generează submulţimea fuzzy respectivă). Fie atunci două submulţimi fuzzy A(x) şi B(x). Ce grad de apartenenţă are un element oarecare la reuniunea $A \cup B$ (ce grad de adevăr are propoziţia conjunctivă ***A SAU B*** ? – de exemplu, dacă A este propoziţia “***x este mic***” şi B propoziţia “***x este mijlociu***”, ce grad de adevăr are propoziţia “***x este mic sau mijlociu***” ?).

În acest exemplu, să presupunem că $\mu_A(x)=0.8$ (deci am acordat 0.8 posibilităţii ca $x \in A(x)$, adică posibilităţii ca x să fie considerat mic) şi $\mu_A(x)=0.4$ (deci am acordat 0.4 posibilităţii ca $x \in B(x)$, adică posibilităţii ca x să fie considerat mijlociu).

Cât pot fi de “sigur” că elementul x aparţine cel puţin uneia dintre cele două submulţimi ? Evident, 0.8 !

Deci, pentru operaţia de reuniune, în cazul mulţimilor fuzzy, vom avea relaţia :

$$\mu_{R=A\cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{54}$$

Pentru exemplifivare, şa reluăm mulţimea totală T definită în (46) şi submulţimile fuzzy A(x), B(x) şi C(x) din (20), (23) şi (25), rescrise mai jos, pentru a uşura urmărirea :

$$T = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A(x) = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.6}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.2}{5}\right\},$$

cu suportul

$$S_A = \{1,2,3,4,5\}$$

$$B(x) = \left\{\frac{0.2}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.8}{7}, \frac{1}{8}, \frac{0.9}{9}, \frac{0.7}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.1}{13}\right\}$$

cu suportul

$$S_B = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

$$C(x) = \left\{\frac{0.01}{10}, \frac{0.1}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.6}{13}, \frac{0.8}{14}, \frac{0.9}{15}\right\}$$

cu suportul

$$S_C = \{10,11,12,13,14,15\}$$

Conform definiţiei (54), vom avea :

$$A(x) \cup B(x) = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.6}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.8}{7}, \frac{1}{8}, \frac{0.9}{9}, \frac{0.7}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.1}{13}\right\} \tag{48}$$

$$B(x) \cup C(x) = \left\{\frac{0.2}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.9}{7}, \frac{1}{8}, \frac{0.9}{9}, \frac{0.7}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.6}{13}, \frac{0.8}{14}, \frac{1}{15}\right\} \tag{49}$$

$$A(x) \cup C(x) = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.6}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.2}{5}, \frac{0.01}{10}, \frac{0.1}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.6}{13}, \frac{0.8}{14}, \frac{1}{15}\right\} \tag{50}$$

iar pentru suporturile lor :

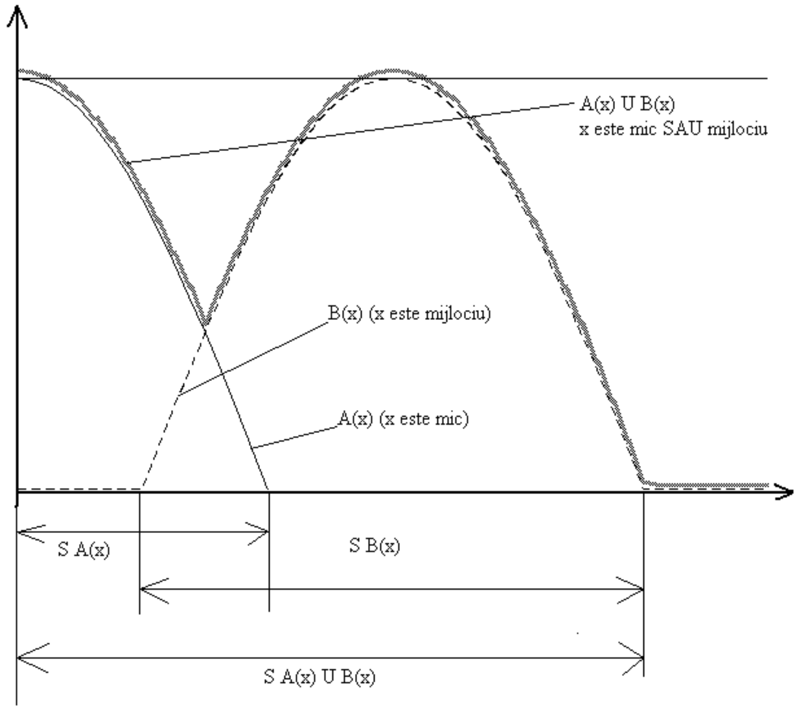
$$S_{A\cup B} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \quad (51)$$
$$S_{B\cup C} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \quad (52)$$
$$S_{A\cup C} = \{1,2,3,4,5,10,11,12,13,14,15\} \quad (53)$$

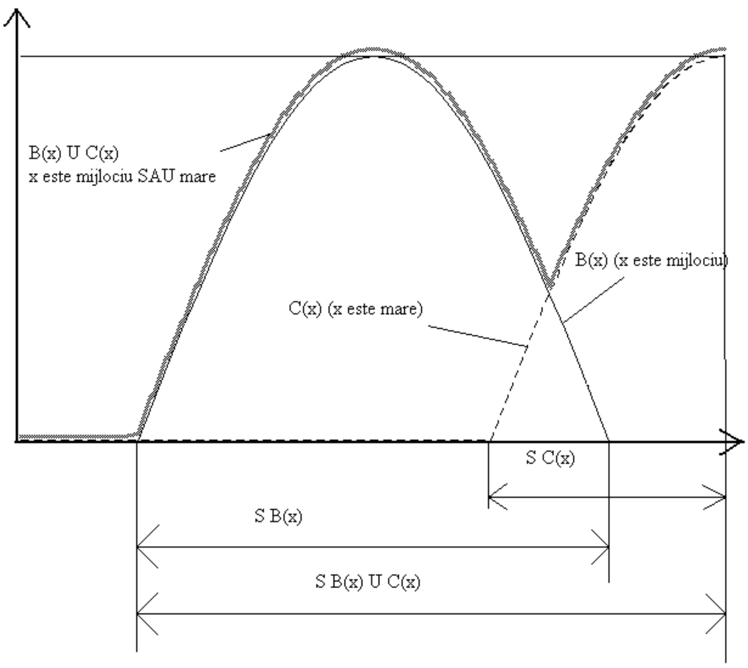
de unde se constată că

$$\begin{aligned} S_A \cup S_B &= S_{A\cup B} \\ S_B \cup S_C &= S_{B\cup C} \\ S_A \cup S_C &= S_{A\cup C} \end{aligned} \quad (54)$$

adică reuniunea suporturilor este egală cu suportul reuniunii.

Desigur, relaţia (47) de definiţie a reuniunii rămâne valabilă şi pentru cazul continuu.
În Figura 8 sunt considerate mulţimile A(x) ("x este mic"), B(x) ("x este mijlociu") şi C(x) ("x este mare") şi sunt reprezentate mulţimile A(x)∪B(x) ("x este mic sau mijlociu"), B(x) ∪C(x) ("x este mijlociu sau mare") şi A(x) ∪C(x) ("x este mic sau mare") :





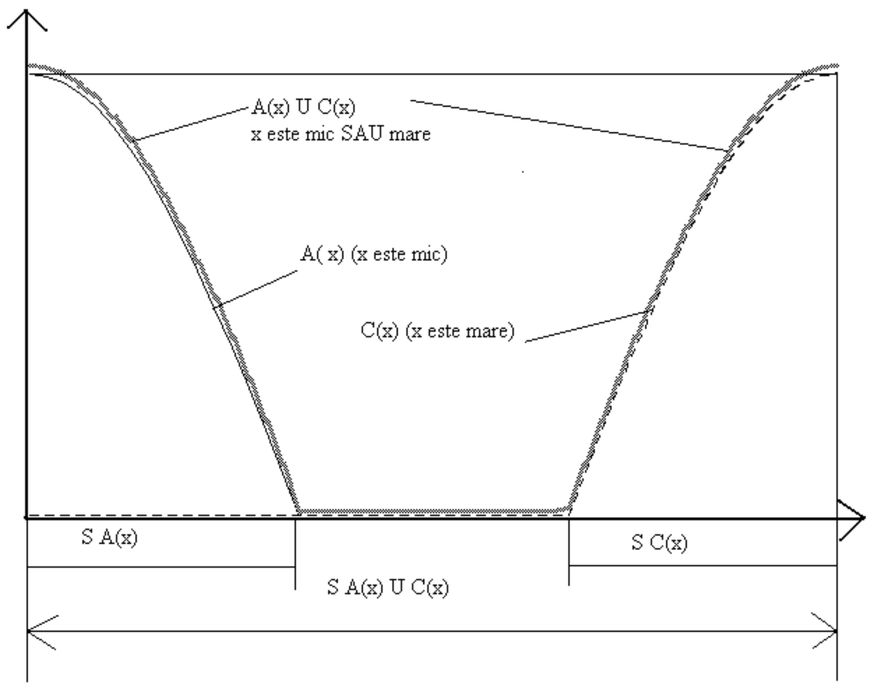


Figura 8 Exemplificarea operaţiei de reuniune
între submulţimi fuzzy cu suport continuu

3.2 INTERSECŢIA

În cazul mulţimilor booleene, intersecţia a două mulţimi F şi G este definită ca fiind mulţimea elementelor comune celor două mulţimi :

$$I = A \cap B = \{x \mid x \in A\ SI\ x \in B\} \tag{63}$$

Pentru exemplul considerat, vom avea :

$$F \cap G = \{4,5\} \tag{64}$$
$$G \cap H = \{10,11,12,13\} \tag{65}$$
$$F \cap H = \varnothing \tag{66}$$

Consideraţii similare celor expuse în subcapitolul anterior, ne conduc la tabelul 2 :

x∈A	x∈B	x∈R=A∩B
$\mu_A(x)$	$\mu_B(x)$	$\mu_I(x)=\mu_{A\cap B}(x)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabelul 2

şi se observă că, pentru mulţimile booleene, vom avea mereu
$\mu_I(x) = \mu_{A\cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$

Şi această relaţie rămâne valabilă şi în cazul mulţimilor fuzzy.

Reluând exemplul din subcapitolul anterior (μ_A(x)=0.8, μ_B(x)=0.4), se pune întrebarea : cât de siguri putem fi că elemetul x aparţine Intersecţiei ? Este adevăratr că am acordat un grad destul de mare (0.8) posibilităţii ca x să aparţină mulţimii A, dar avem doar 0.4 certitudinea ca el să aparţină lui B. Este clar că posibilitatea ca el să aparţină ambelor mulţimi nu este mai mare de 0.4 .

Deci, relaţia de definiţie pentru funcţia de apartenenţă a reuniunii a două mulţimi fuzzy este :

$$\mu_I(x) = \mu_{A\cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{67}$$

Pentru mulţimile din (46), (20), (23), (25) obţinem :

$$A(x) \cap B(x) = \left\{\frac{0.2}{4}, \frac{0.2}{5}\right\} \tag{68}$$

$$B(x) \cap C(x) = \left\{\frac{0.01}{10}, \frac{0.1}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.1}{13}\right\} \tag{69}$$

$$A(x) \cap C(x) = \varnothing \tag{70}$$

iar pentru suporturi :

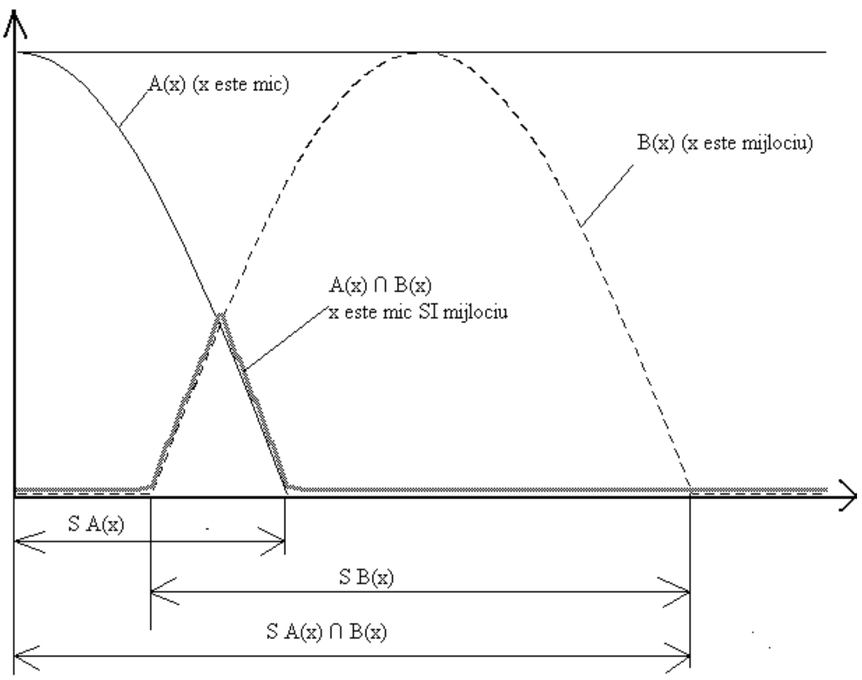
$$S_{A\cap B}=\{4,5\} \quad (71)$$
$$S_{B\cap C}=\{10,11,12,13\} \quad (72\}$$
$$S_{A\cap C}=\varnothing \quad (73)$$

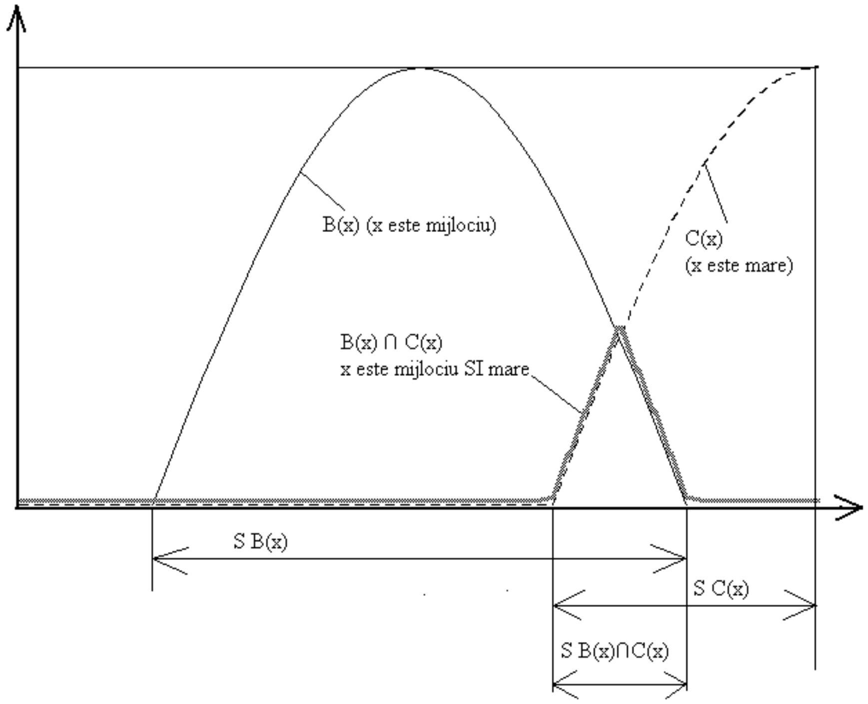
şi constatăm că

$$\begin{aligned} S_A \cap S_B &= S_{A\cap B} \\ S_B \cap S_C &= S_{B\cap C} \\ S_A \cap S_C &= S_{A\cap C} \end{aligned} \quad (74)$$

adică suportul intersecţiei a două mulţimi fuzzy este egal cu intersecţia suporturilor mulţimilor fuzzy.

Pentru cazul continuu, reluând mulţimile din Figura 8, se pot urmări intersecţiile în Figura 9.





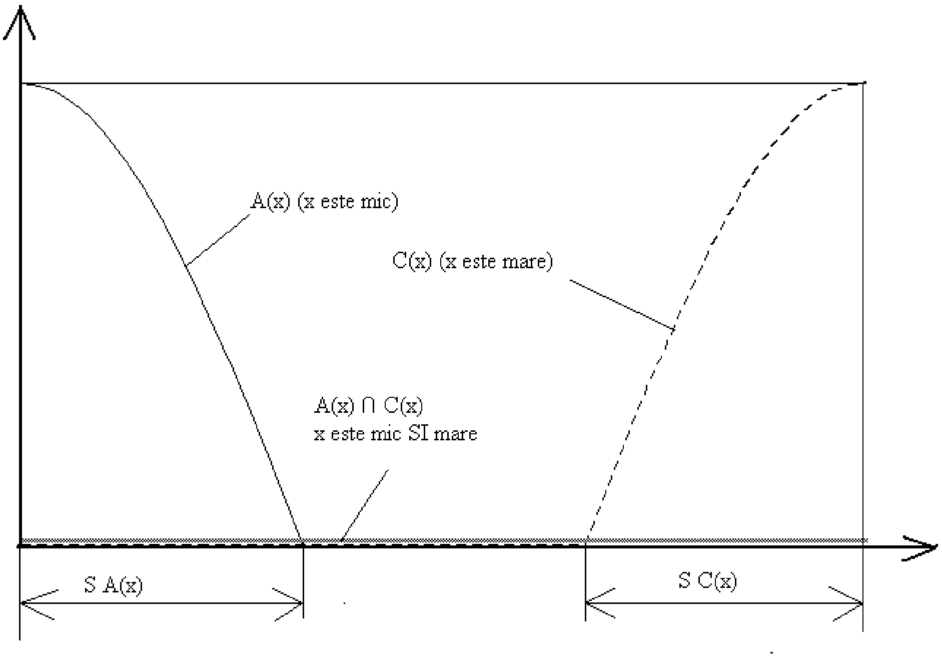


Figura 9 Exemplificarea operaţiei de intersecţie între submulţimi fuzzy cu suport continuu

3.3 COMPLEMENTAREA

Diferenţele majore între mulţimile booleene şi mulţimile fuzzy intervin din momentul lucrului cu complementara. În cazul mulţimilor booleene, complementara unei submulţimi A a mulţimii totale T este definită ca fiind mulţimea elementelor lui T care ***NU*** aparţin lui A :

$$F^C(x) = \{x \in T \mid x \notin F\} \tag{75}$$

Pentru cazul (47), (48), (49), vom avea :

$$F^C = \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \tag{76}$$
$$G^C = \{1,2,3,14,15\} \tag{77}$$
$$H^C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \tag{78}$$

şi, (ceea ce ştiam deja) :

$$\begin{aligned} &F \cap F^C = \emptyset, \qquad && F \cup F^C = T \\ &G \cap G^C = \emptyset, && G \cup G^C = T \\ &H \cap H^C = \emptyset, && H \cup H^C = T \end{aligned} \tag{79}$$

ceea ce conduce la tabelul 3 :

x∈A	x∈R= A^C
$\mu_A(x)$	$\mu_{A^C}(x)$
0	1
1	0

Tabelul 3

în care avem mereu $\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Aceasta va fi definiţia funcţiei de apartenenţă pentru complementară şi în cazul mulţimilor fuzzy, din motive evidente (dacă am considerat că posibilitatea ca un element să aparţină unei mulţimi este 0.8, înseamnă că am considerat că posibilitatea ca el să NU aparţină mulţimii respective este de 0.2, deci 0.2 este posibilitatea ca el să aparţină complementarei).

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{80}$$

ceea ce, în cazul mulţimilor din (20), (23), (25) înseamnă :

$$A^C(x) = \left\{ \frac{0.2}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15} \right\} \tag{81}$$

Elementul 1 nu aparţine complementarei, căci $\mu_A(1) = 1$, deci, conform definiţiei (80), $\mu_{A^C}(1) = 1 - \mu_A(1) = 1 - 1 = 0$.

Elementele de la 6 până la 15 nu aparţin mulţimii A(x), deci au gradul de aparteneţă 0 la A(x) şi vor avea gradul de aparteneţă 1-0=1 la complementara lui A(x) (deci aparţin sigur lui $A^C(x)$).

Aceleaşi considerente conduc la :

$$B^C(x)=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{0.8}{4},\frac{0.6}{5},\frac{0.4}{6},\frac{0.2}{7},\frac{0.1}{9},\frac{0.3}{10},\frac{0.5}{11},\frac{0.7}{12},\frac{0.9}{13},\frac{1}{14},\frac{1}{15}\right\} \quad (82)$$

(unde observăm că elementul 8 nu aparţine complementarei lui B(x), căci are gradul de aparteneţă 1 la B(x); $\mu_B(8)=1 \Rightarrow \mu_{B^C}(8)=1-\mu_B(8)=1-1=0$, şi analog :

$$C^C(x)=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{0.99}{10},\frac{0.9}{11},\frac{0.7}{12},\frac{0.4}{13},\frac{0.2}{14}\right\} \quad (83)$$

unde elemetul 15 nu aparţine lui $C^C(x)$.

Cele trei submulţimi din (81), (82) şi (83) au, respectiv, suporturile :

$$S_{A^C}=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} \quad (84)$$
$$S_{B^C}=\{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15\} \quad (85)$$
$$S_{C^C}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\} \quad (86)$$

Să remarcăm, însă, că am avut :

$$S_A=\{1,2,3,4,5\} \quad (87)$$
$$S_B=\{4,5,6,7,9,10,11,12,13\} \quad (88)$$
$$S_C=\{10,11,12,13,14,15\} \quad (89)$$

putem calcula complementarele suporturilor

$$(S_A)^C=\{6,7,8,9,10,11,12,13,14,,15\}\neq S_{A^C} \quad (90)$$
$$(S_B)^C=\{1,2,3,14,15\}\neq S_{B^C} \quad (91)$$
$$(S_C)^C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\neq S_{C^C} \quad (92)$$

adică suortul complementarei NU este egal cu complementara suportului.

Acest rezultat ne sugereazădeja că mulţimile fuzzy nu tratează complementara în acelasi mod ca mulţimile booleene. Să adâncim puţin studiul acestei diferenţe : reluând exemplele (47), (48), (49) de mulţimi booleene, vom avea :

$$\begin{aligned}F\cup F^C &=\{1,2,3,4,5\}\cup\{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}=\\&=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}=T\end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned}G\cup G^C &=\{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}\cup\{1,2,3,14,15\}=\\&=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}=T\end{aligned} \quad (94)$$

$$H \bigcup H^C = \{10,11,12,13,14,15\} \bigcup \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \\ = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} = T \tag{95}$$

$$F \bigcap F^C = \{1,2,3,4,5\} \bigcap \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\} = \varnothing \tag{96}$$

$$G \bigcap G^C = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\} \bigcap \{1,2,3,14,15\} = \varnothing \tag{97}$$

$$H \bigcap H^C = \{10,11,12,13,14,15\} \bigcap \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = \varnothing \tag{98}$$

adică, pentru orice mulţime booleeană F,

$$F \bigcup F^C = T \tag{99}$$

$$F \bigcap F^C = \varnothing \tag{100}$$

rezultate cunoscute din teoria clasică a mulţimilor (rezultate din chiar definiţia complementarei în cazul mulţimilor booleene).

Care este situaţia în cazul mulţimilor fuzzy ? Să reluăm exemplele concrete de mulţimi fuzzy cu care am lucrat până acum; aplicând relaţia (54) de definiţie a gradului de aparteneţă la reuniune, obţinem :

$$A(x) \cup A^C(x) = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.6}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.2}{5}\right\} \bigcup \\ \bigcup \left\{\frac{0.2}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}\right\} = \\ = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.6}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}\right\} \neq T \tag{101}$$

deoarece T este o mulţime booleeană, deci ar trebui să avem gradul tuturor elementelor egal cu 1, ceea ce nu este cazul pentru elementele 2,3,4 şi 5.

Analog,

$$B(x) \cup B^C(x) = \left\{\frac{0.2}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.8}{7}, \frac{1}{8}, \frac{0.9}{9}, \frac{0.7}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.1}{13}\right\} \bigcup \\ \bigcup \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{0.6}{5}, \frac{0.4}{6}, \frac{0.2}{7}, \frac{0.1}{9}, \frac{0.3}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.9}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}\right\} = \\ = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{0.6}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.8}{7}, \frac{1}{8}, \frac{0.9}{9}, \frac{0.7}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.9}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}\right\} \neq T \tag{102}$$

$$C(x) \cup C^C(x) = \left\{ \frac{0.01}{10}, \frac{0.1}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.6}{13}, \frac{0.8}{14}, \frac{1}{15} \right\} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{0.99}{10}, \frac{0.9}{11}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.4}{13}, \frac{0.2}{14} \right\} = \tag{103}$$

$$= \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{0.99}{10}, \frac{0.9}{11}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.6}{13}, \frac{0.8}{14}, \frac{1}{15} \right\} \neq T$$

De asemenea, aplicând relaţia 53 de definiţie a gradului de apartenenţă la intersecţie, obţinem :

$$A(x) \bigcap A^C(x) = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.6}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.2}{5} \right\} \bigcap$$

$$\bigcap \left\{ \frac{0.2}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15} \right\} = \tag{104}$$

$$= \left\{ \frac{0.2}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.2}{5} \right\} \neq \varnothing$$

$$B(x) \bigcap B^C(x) = \left\{ \frac{0.2}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.6}{6}, \frac{0.8}{7}, \frac{1}{8}, \frac{0.9}{9}, \frac{0.7}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.1}{13} \right\} \bigcap$$

$$\bigcap \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{0.6}{5}, \frac{0.4}{6}, \frac{0.2}{7}, \frac{0.1}{9}, \frac{0.3}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.9}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15} \right\} = \tag{105}$$

$$= \left\{ \frac{0.2}{4}, \frac{0.4}{5}, \frac{0.4}{6}, \frac{0.8}{7}, \frac{0.1}{9}, \frac{0.3}{10}, \frac{0.5}{11}, \frac{0.03}{12}, \frac{0.1}{13} \right\} \neq \varnothing$$

$$C(x) \bigcap C^C(x) = \left\{ \frac{0.01}{10}, \frac{0.1}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.6}{13}, \frac{0.8}{14}, \frac{1}{15} \right\} \bigcap$$

$$\bigcap \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{0.99}{10}, \frac{0.9}{11}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.4}{13}, \frac{0.2}{14} \right\} = \tag{106}$$

$$= \left\{ \frac{0.01}{10}, \frac{0.1}{11}, \frac{0.3}{12}, \frac{0.4}{13}, \frac{0.2}{14} \right\} \neq T$$

deci, în general,

$$A(x) \bigcup A^C(x) \neq T \tag{107}$$

$$A(x) \bigcap A^C(x) \neq \varnothing \tag{108}$$

Relaţiile (107) şi (108) reprezintă diferenţele majore între mulţimile fuzzy şi mulţimile booleene.

Fie A(x) submulţimea fuzzy generată de propoziţia “x este mic”. Atunci, $A^C(x)$ corespunde propoziţiei “x nu este mic”. Fie $\mu_A(3) = 0.6$ (gradul de adevăr al propoziţiei “3 este mic” este 0.6); rezultă atunci că $\mu_{A^C}(3) = 1 - 0.6 = 0.4$. Relaţia (107) ne conduce atunci la concluzia că propoziţia <<”x este mic” SAU “x nu este mic”>> nu epuizează toate posibilităţile, căci, pentru elementul 3, de exemplu, avem $\mu_{A\cup A^c}(3)=0.6\neq 1$, adică nu este sigur că <<"x este mic" SAU "x nu este mic">> (într-o exprimare "mai liberă", nu este sigur că "x ori este mic, ori nu este mic"). De asemenea, relaţia (108) ne conduce la concluzia că propoziţia <<"x este mic" ŞI "x nu este mic">> nu este absurdă, căci din $\mu_A(3)=0.6$ şi $\mu_{A^c}(3)=0.4$ rezultă $\mu_{A\cap A^c}(3)=0.4\neq\emptyset$ (deci, în limbaj de zi cu zi, nu este exclusă posibilitatea "x este mic ŞI – totodată - nu este mic"). Vom reveni asupra acestui fapt în subcapitolul dedicat relaţiilor condiţionale fuzzy.

În Figura 10 sunt reluate cele expuse până în prezent pentru cazul unor mulţimi fuzzy cu suport continuu (pentru care toate cele expuse rămân valabile).

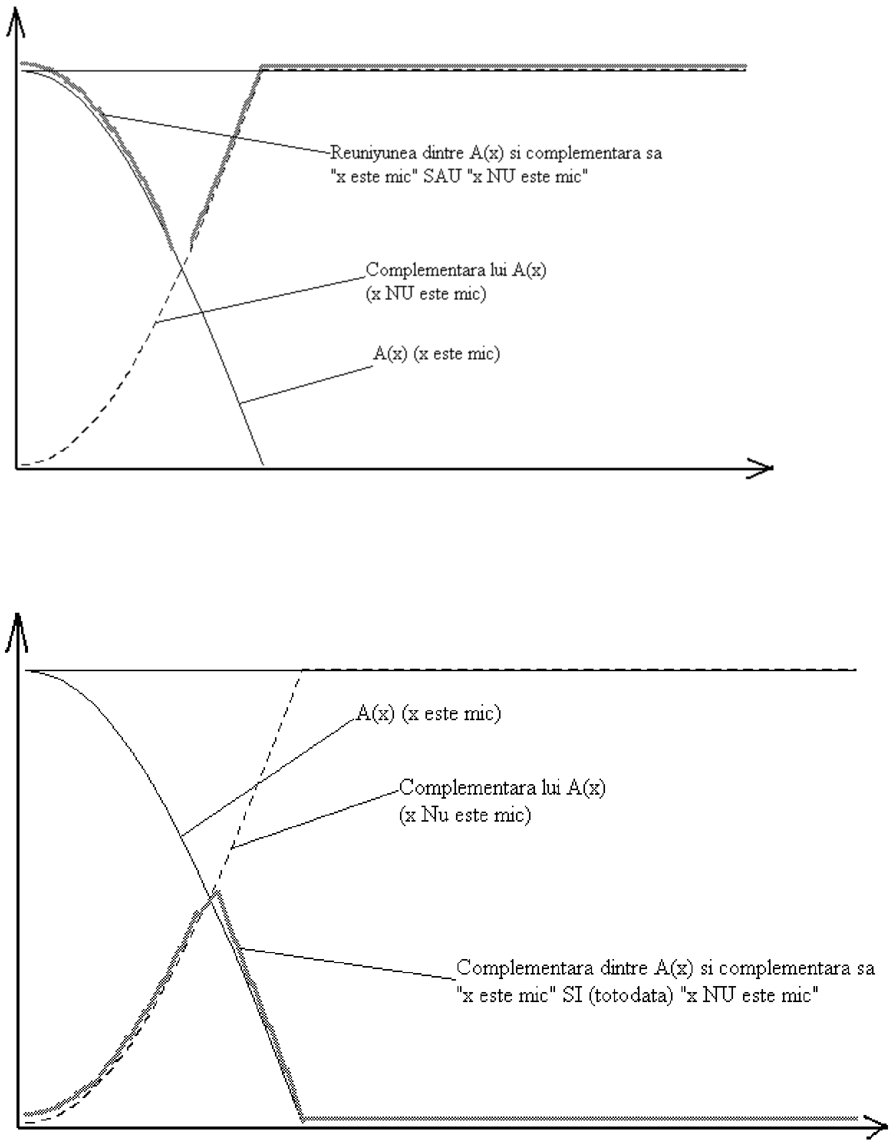


Figura 10 Reuniunea, respectiv intersecţia dintre o mulţime fuzzy cu suport continuu şi complementara sa

AXIOMELE LOGICII FUZZY ŞI ALGEBREI FUZZY

Idempotenţa $A \cup A = A$
$A \cap A = A$

Comutativitatea $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

Asociativitatea $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \stackrel{\text{def}}{=} A \cup B \cup C$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \stackrel{\text{def}}{=} A \cap B \cap C$

Absorbţia $A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$

Distributivitatea $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Legile lui de Morgen $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(unde s-a notat complementara unei mulţimi A prin $\bar{A}$, In loc de A^C)

Sau, în notaţiile de până acum,

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Se observă uşor similitudnea cu axiomele din cazul mulţimilor booleene!

3.4 PRODUSUL DINTRE UN NUMĂR REAL POZITIV ŞI O SUBMULŢIME FUZZY

Fie submulţimea fuzzy

$$A(x) = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \cdots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} \tag{109}$$

şi un număr real pozitiv β; prin definiţie

$$\beta \bullet A(x) \stackrel{d}{=} \left\{ \frac{\beta \bullet \mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\beta \bullet \mu_A(x_2)}{x_2}, \ldots, \frac{\beta \bullet \mu_A(x_n)}{x_n} \right\} \tag{110}$$

Singura restricţie impusă lui β (în afara celei din definiţie) este ca, prin înmulţire cu oricare dintre gradele de apartenenţă la submulţimea A(x), să nu rezulte un număr supraunitar.

Trebuie să avem, deci :

$$\beta \bullet \mu_A(x_i) \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{111}$$

Acest lucru înseamnă că β poate fi, evident, subunitar, dar poate fi şi supraunitar , dacă gradele de aparteneţă la submulţimea fuzzy A(x) permit acest lucru.

Fie, de exemplu :

$$A(x) = \left\{ \frac{0.01}{500}, \frac{0.2}{600}, \frac{0.3}{700} \right\} \tag{112}$$

Atunci, pentru β=3 vom avea :

$$\beta \bullet A(x) = 3 \bullet A(x) = \left\{ \frac{0.03}{500}, \frac{0.6}{600}, \frac{0.9}{700} \right\} \tag{113}$$

3.5 PRODUSUL A DOUĂ SUBMULTIMI FUZZY

Fie submulţimile fuzzy

$$A(x) = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_A(x_2)}{x_2}, \cdots, \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} \tag{114}$$

$$B(x) = \left\{ \frac{\mu_B(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_B(x_2)}{x_2}, \cdots, \frac{\mu_B(x_n)}{x_n} \right\} \tag{115}$$

Prin definiţie :

$$A(x)\bullet B(x)\stackrel{d}{=}\left\{\frac{\mu_A(x_1)\bullet\mu_B(x_1)}{x_1},\frac{\mu_A(x_2)\bullet\mu_B(x_1)}{x_2},\cdots,\frac{\mu_A(x_n)\bullet\mu_B(x_1)}{x_n}\right\} \qquad (116)$$

Este evident că mulţimile fuzzy A(x) şi B(x) trebuie să fie submulţimi fuzzy ale aceleiaşi mulţimi totale T. Nu este însă obligatoriu ca ele să aibă acelaşi suport; pentru un element x_i care aparţine lui A(x) şi nu aparţine lui B(x), vom avea, evident

$$\mu_{A\bullet B}(x_i)=\mu_A(x_i)\mu_B(x_i)=\mu_A(x_i)\bullet 0=0 \qquad (117)$$

(şi în mod analog pentru un element x_j care aparţine lui B(x) şi nu aparţine lui A(x)).

Exemplu :

$$A(x)=\left\{\frac{0.2}{500},\frac{0.8}{600},\frac{0.9}{700},\frac{1}{800},\frac{1}{900}\right\} \qquad (118)$$

$$B(x)=\left\{\frac{1}{400},\frac{1}{500},\frac{0.7}{600},\frac{0.2}{700},\frac{0.1}{800}\right\} \qquad (119)$$

$$A(x)\bullet B(x)=\left\{\frac{0.2}{500},\frac{0.56}{600},\frac{0.18}{700},\frac{0.1}{800}\right\} \qquad (120)$$

Operaţia de produs a două submulţimi fuzzy serveşte, de fapt, pentru a introduce operaţia de ridicare la putere a unei submulţimi fuzzy.

3.6 RIDICAREA LA PUTERE A UNEI SUBMULŢIMI FUZZY

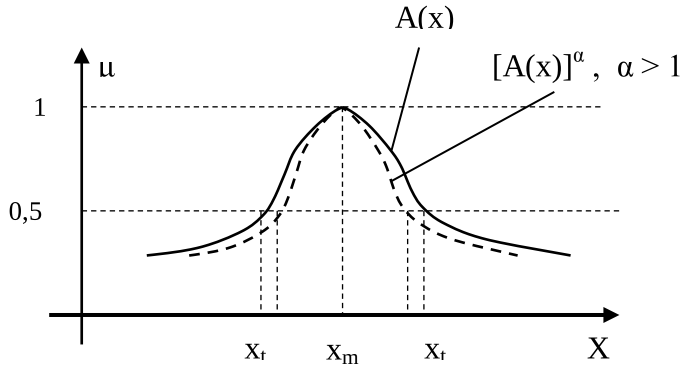
Dacă în relaţia (116) punem B(x)=A(x), obţinem :

$$A(x)\bullet A(x)\stackrel{d}{=}[A(x)]^2=\left\{\frac{\mu_A^2(x_1)}{x_1},\frac{\mu_A^2(x_2)}{x_2},\cdots,\frac{\mu_A^2(x_n)}{x_n}\right\} \qquad (121)$$

de unde este uşor să generalizăm :

$$[A(x)]^\alpha\stackrel{d}{=}\left\{\frac{\mu_A^\alpha(x_1)}{x_1},\frac{\mu_A^\alpha(x_2)}{x_2},\cdots,\frac{\mu_A^\alpha(x_n)}{x_n}\right\} \qquad (122)$$

Pentru α supraunitar, valorile tuturor gradelor de apartenenţă, cu excepţia celor egale cu 1, descresc. Aceasta înseamnă, deci, că ridicarea la o putere supraunitară păstrează punctul de vaguitate minimă ($\mu_A(x)=1\Rightarrow\mu_A^\alpha(x)=1$), dar micşorează valorile tuturor celorlalte grade de apartenenţă (vezi Figura 11)

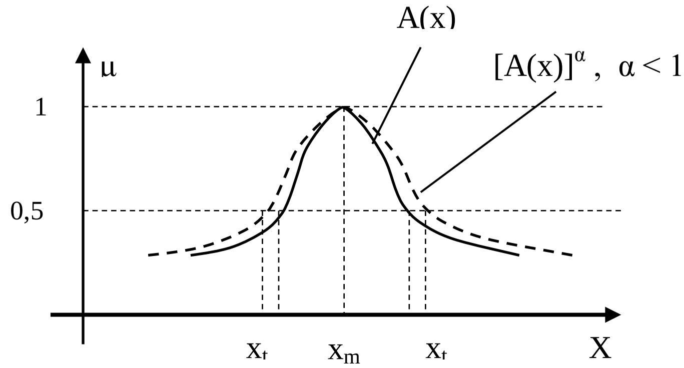


Ridicarea la o putere supraunitară
a unei submulţimi fuzzy (concentrare)

Figura 11

Se vede atunci că punctele de traversare se apropie. Ne aducem însă aminte că păstrarea punctului de vaguitate minimă şi apropierea punctelor de traversare corespund unei operaţii de ***concentrare***.

Pentru α subunitar, valorile tuturor gradelor de apartenenţă, cu excepţia celor egale cu 1, cresc. Acesta înseamnă, deci, că ridicarea la o putere subunitară păstrează punctul de vaguitate minimă ($\mu_A(x)=1 \Rightarrow \mu_A^{\alpha}(x)=1$), dar măreşte valorile tuturor celorlalte grade de apartenenţă (vezi Figura 12).



Ridicarea la o putere subunitară
a unei submulţimi fuzzy (diluare)

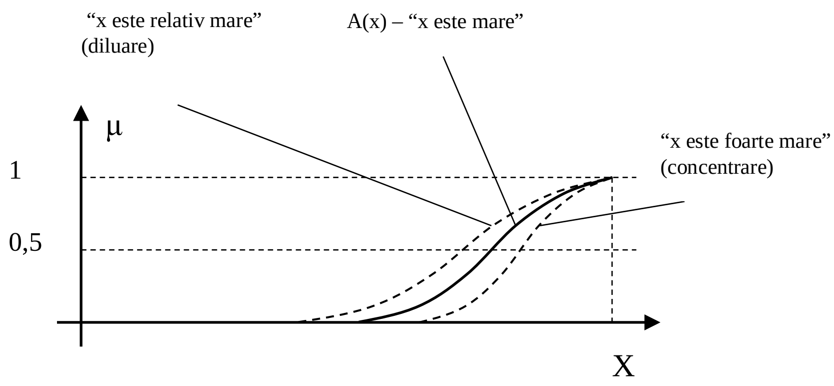
Figura 12

Se vede atunci că punctele de traversare se depărtează. Ne amintim că păstrarea punctului de vaguitate minimă şi depărtarea punctelor de traversare corespund unei operaţii de ***diluare***.

Concentrarea şi diluarea pot fi obţinute prin adăugarea unor "praguri", "delimitări". "precizări" (în literatura de specialitate în limba engleză se foloseşte termenul "hedges") cum ar fi :

- pentru concentrare "foarte…", "extrem de …". etc;
- pentru diluare "relativ…", "oarecum …", "mai mult sau mai puţin …", etc;

De exemplu, pentru o submulţime fuzzy determinată de propoziţia fuzzy "x este mare", se obţin noi submulţimi fuzzy ca "x este foarte mare" (concentrare) sau "x este relativ mare" (diluare).



Diluarea şi concentrarea
cu ajutorul pragurilor

Fig.13

În lipsa altor precizări, considerăm pentru operaţia de concentrare α=2 şi pentru operaţia de diluare α=0.5.

Atunci putem rezuma astfel :

$$\begin{matrix} Introducerea\ unui\ prag \\ de\ tip\ "\ foarte" \end{matrix} \Rightarrow \quad concentrare \quad \Rightarrow \quad [A(x)]^2$$

$$\begin{matrix} Introducerea\ unui\ prag \\ de\ tip\ "relativ" \end{matrix} \Rightarrow \quad dilatere \quad \Rightarrow \quad [A(x)]^{1/2}$$

3.7. PRODUSUL CARTEZIAN A DOUĂ SUBMULŢIMI FUZZY

Să ne reamintim produsul cartezian a două mulţimi booleene : dându-se două mulţimi A şi B, produsul cartezian A × B este, prin definiţie, mulţimea perechilor ordonate care se pot forma luând ca prim element al perechii un element al mulţimii A şi ca al doilea element al perechii un element din mulţimea B.

$$A \times B \overset{d}{=} \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \tag{123}$$

Exemplu : fie

$$A = \{a, b\} \tag{124}$$

$$B = \{1,2,3\} \tag{125}$$

atunci :

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\} \tag{126}$$

Trebuie să facem câteva observaţii :

- termenul de "ordonat" din definiţia produsului cartezian se referă la ordinea elementelor unei perechi (în sensul că întotdeauna primul element al unei perechi trebuie să fie un element al mulţimii A, iar cel de-al doilea element al perechii trebuie să fieun elemnt din mulţimea B) şi nu la ordinea perechilor în mulţimea A × B (perechile ca atare, fiind elementele mulţimii produs cartezian A × B, ca la orice mulţime, ordinea elementelor în mulţime nu are nici o importanţă);
- nu este obligatoriu ca A şi B să fie submulţimi ale aceleeaşi mulţimi totale (de exemplu, A poate fi mulţimea studenţilor dintr-o grupă, iar B mulţimea notelor la un examen); cu atât mai mult, mulţimea rezultată A × B nu va mai fi o submulţime a unei aceleaşi mulţimi totale;

Observăm că, pentru ca perechea (x,y) să fie un element al produsului cartezian (să aibă gradul de apartenenţă 1 la produsul cartezian) este necesar ca x să fie un element al mulţimii A (să aibă gradul de aparteneţă 1 la mulţimea A) ***ŞI*** y să fie un element al mulţimii B (să aibă gradul de aparteneţa 1 la mulţimea B), ceea ce este rezumat în tabelul 4 :

x∈A	x∈B	(x,y)∈ A × B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
$\mu_A(x)$	$\mu_B(y)$	$\mu_{A\times B}((x,y))$

Tabelul 4

ceea ce înseamnă că $\mu_{A\times B}((x, y)) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$.

Este uşor de văzut că şi în cazul mulţimilor fuzzy trebuie să avem tot o astfel de relaţie (raţionamentul este perfect analog ca cel descris la operaţia ***ŞI***) .

Relaţia de definiţie a funcţiei de apartenenţă pentru produsul cartezian a două submulţimi fuzzy A(x) şi B(x) este deci :

$$\mu_{A\times B}((x,y)) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{127}$$

Subliniem încă odată că nu este necesar ca cele două submulţimi fuzzy A(x) şi B(y) să fie submulţimi ale aceleeaşi mulţimi totale (ceea ce este pus în evidenţa şi de notarea separată a variabileleor – x şi y).
Fie următorul exemplu :

$$A(x) = \left\{ \frac{0.7}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0.1}{3} \right\} \tag{128}$$

$$B(y) = \left\{ \frac{0.8}{rosu}, \frac{0.3}{negru} \right\} \tag{129}$$

$$A(x) \times B(y) = \left\{ \frac{0.7}{(1, rosu)}, \frac{0.3}{(1, negru)}, \frac{0.5}{(2, rosu)}, \frac{0.3}{(2, negru)}, \frac{0.1}{(3, rosu)}, \frac{0.1}{(3, negru)} \right\} \tag{130}$$

Pentru a fi mai sugestiv, vom aşeza aceste două mulţimi pe două axe în plan :

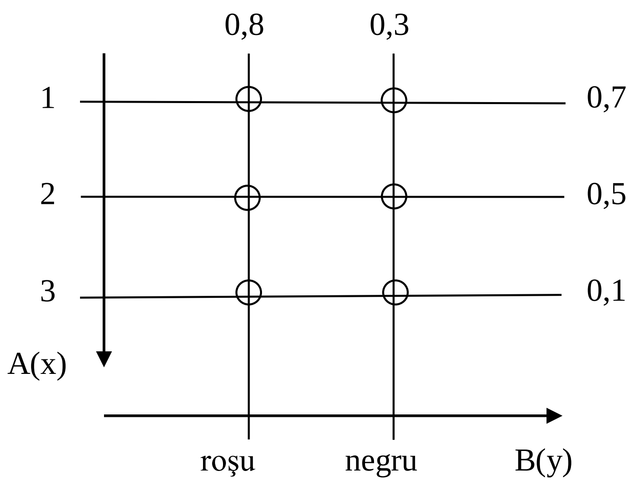
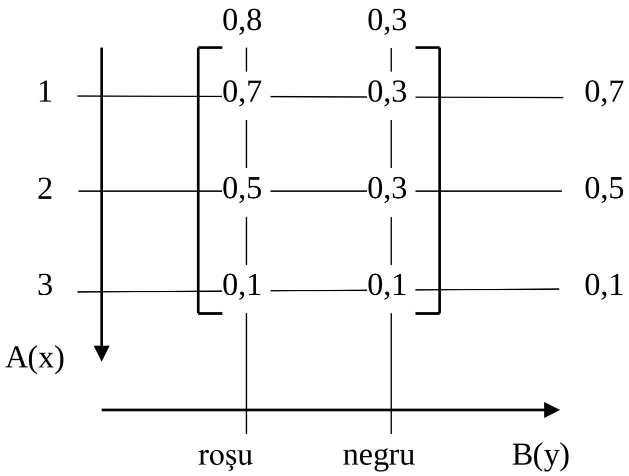


Figura 14 Exemplu de produs cartezian între două mulţimi fuzzy

unde am aşezat elementele primei mulţimi pe axa verticală, de sus în jos, şi elementele celei de-a doua pe axa orizontală de la stânga la dreapta (subliniem că vom păstra de acum înainte această ordine, din motive care vor rezulta ulterior). În dreptul fiecărui element am trecut şi gradul său de apartenenţă la mulţimea căreia îi aparţine.

Este evident că se pot crea atâte perechi ordonate câte rezultă din figură (în cazul din exemplul nostru – şase).

Respectând relaţia (128), vom trece în locul punctelor de intersecţie valorile funcţiei de aparteneţă, rezultând figura 15.



Justificarea scrierii matriceale
a produsului cartezian

Figura 15 Justificarea scrierii matriceale
a produsului cartezian

Putem acum să reprezentăm produsul cartezian al mulţimilor A(x) şi B(y) sub forma matricii :

$$A(x) \times B(x) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \tag{131}$$

Aceasta este forma pe care o vom folosi de aici înainte.

4. RELAŢII FUZZY

Relaţiile simple dintre variabilele lingvistice pot fi caracterizate prin propoziţii condiţionale fuzzy de tipul DACĂ-ATUNCI (IF-THEN) sau DACĂ-ATUNCI-ALTFEL (IF-THEN-ELSE).

De exemplu, considerând variabilele lingvistice x şi y, putem avea o relaţie de tipul

DACĂ x este relativ mic **ATUNCI** y este foarte mare (132)

În timp ce, în cazul calculului propoziţional clasic, o expresie de tipul

DACĂ J **ATUNCI** K (133)

reprezintă o implicaţie

$$J \Rightarrow K \quad (134)$$

definită de identitatea

$$J \Rightarrow K \equiv NON\ J \bigcup K \quad (135)$$

corespunzătoare tabelului de adevăr

J	K	J => K
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabelul 5

în cazul propoziţiei condiţionale fuzzy

DACĂ x este mic **ATUNCI** y este mare (136)

(unde x şi y sunt variabile fuzzy, iar “mic” şi “mare” sunt etichete ale submulţimilor fuzzy care reprezintă valorile variabilelor fuzzy x şi y, submulţimi care pot fi notate prin A(x) şi B(y)) relaţia (136) capătă un aspect similar cu cel din (131).

Se constată că aceasta descrie o relaţie fuzzy între două variabile fuzzy şi, deci, poate fi definită ca o “relaţie fuzzy”

DACĂ A(x) **ATUNCI** B(y) (137)

O relaţie fuzzy mai complexă decât cea din (137) este

DACĂ A(x) **ATUNCI** B(y) **ALTFEL** C(y) (138)

4.1. RELATIA FUZZY IF-THEN

Implicaţia (respective propoziţia condiţională fuzzy de tipul (137), constituie baza procesului inferenţial efectuat prin intermediul submulţimilor fuzzy.

Să luăm exemplul unui ansamblu de rezistenţe conectate în serie, şi care pot fi şuntate prin închiderea unor contacte (figura 16) :

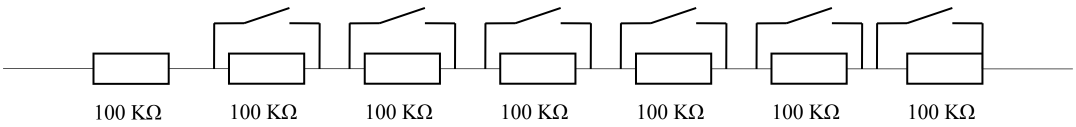


Figura 16 Ansamblu de rezistenţe conectate în serie

În funcţie de starea contactelor, rezistenţa ansamblului va fi dată de tabelul 6 :

Nr.contacte deschise	Rezistenţă ansamblu
0	100
1	200
2	300
3	400
4	500
5	600
6	700

Tabelul 6

Putem formula relaţia condiţională fuzzy

DACĂ numărul de contacte deschise este mare
ATUNCI rezistenţa ansamblului este mare (139)

adică, în cazul general,

DACĂ A(x) ATUNCI B(y) (140)

unde submulţimile fuzzy A(x) şi B(y) ar putea fi

$$A(x) = \left\{ \frac{0.25}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{1}{6} \right\} \tag{141}$$

$$B(y) = \left\{ \frac{0.1}{400}, \frac{0.4}{500}, \frac{0.8}{600}, \frac{1}{700} \right\} \tag{142}$$

Reprezentând grafic acest lucru, obţinem Figura 17 :

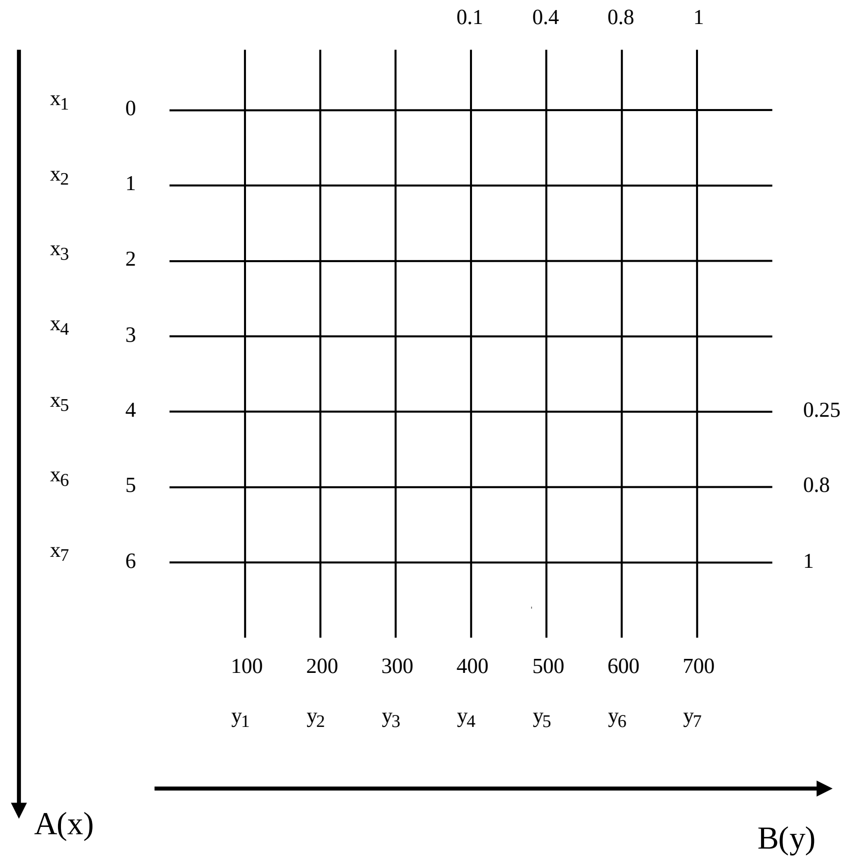


Figura 17 Ilustrarea grafică a relaţiei condiţionale fuzzy (139)

Întrucât implicaţia lingvistică (139) afirmă că fiecărui element x din A(x) îi corespunde orice element y din B(y), pentru fiecare corespondenţă fiind obţinut un element r din R(x,y), rezultă că elementul r se obţine prin prezenţa a două elemente x∈A(x) şi y∈B(y), prezenţa simultană corespunzând unei operaţii logice ***ŞI***. Cum în cazul acesta rezultă o relaţie de tipul

$$\begin{aligned} &\mu_R(x,y) = \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] \\ &x \in T_1, y \in T_2 \end{aligned} \tag{143}$$

Observăm că avem de a face cu un produs cartezian. Din motive care ţin de necesitatea de a avea aceleaşi dimensiuni de matrice la efectuarea unui lanţ de inferenţe, vom lua în considerare în matricea produsului cartezian toate elementele, inclusiv cele pentru care valorile funcţiilor de apartenenţă sunt zero. Obţinem, atunci :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 100 & 200 & 300 & 400 & 500 & 600 & 700 & \\
\multirow{7}{*}{$M=$} & & & & & & & & \\
\end{array}
$$

$$
M = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 100 & 200 & 300 & 400 & 500 & 600 & 700 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0.8 & 0.8 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0.8 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\qquad (144)
$$

Vom numi pe M ***“matricea de apreciere”*** a relaţiei relaţiei condiţionale fuzzy.

Evident, dacă procesul inferenţial se opreşte aici, putem utiliza matricea M’, din colţul dreapta jos a matricei de apreciere din (144) :

$$
M' = \begin{bmatrix}
0.1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\
0.1 & 0.4 & 0.8 & 0.8 \\
0.1 & 0.4 & 0.8 & 1
\end{bmatrix}
$$

Vom avea deci o relaţie similară cu cea de la produsul cartezian :

$$
\mu_M(x_i, y_j) = \min\left[\mu_A(x_i), \mu_B(y_j)\right] \qquad (145)
$$

4.2. RELAŢIA CONDIŢIONALĂ IF-THEN-ELSE

O propoziţie condiţională fuzzy mai evoluată decât IF-THEN este propoziţia condiţională fuzzy IF-THEN-ELSE (DACĂ-ATUNCI-ALTFEL), care constituie, totuşi, o relaţie condiţională fuzzy din carul celor simple. Astfel, propoziţia

$$
IF\ A(x)\ THEN\ B(y)\ ELSE\ C(y) \qquad (146)
$$

poate fi pusă sub forma

$$
\left[IF\ A(x)\ THEN\ B(y)\right] OR \left[IF\ NON\ A(x)\ THEN\ C(y)\right] \qquad (147)
$$

şi între cele două propoziţii condiţionale fuzzy dintre parantezele mari intervine operaţia SAU (OR). Avem de a face în acest caz cu două implicaţii (două produse carteziene descries de două matrice de aceleaşi dimensiuni). Între elementele corespunzătoare din cele două matrice are loc operaţia SAU, care am văzut că înseamnă alegerea maximumului dintre cele două grade de apartenenţă ale celor două elemente, ceea ce mai înseamnă că, în final, vom avea o relaţie de tipul

$$\mu_M(x_i, y_j) = \max\{\min[\mu_A(x_i), \mu_B(y_j)], \min[\mu_A(x_i), \mu_C(y_j)]\} \tag{148}$$

Ţinând însă seama că, aşa cum am arătat

$$A(x) \cup A^C(x) \neq T \tag{149}$$

(adică afirmaţia "A SAU NON A" nu epuizează toate posibilităţile) şi

$$A(x) \cap B(x) \neq \varnothing \tag{150}$$

(adică afirmaţia "A ŞI totodată NON A" nu este o contradicţie totală) înseamnă că, în general, relaţia (146) poate fipusă şi sub o altă formă decât cea din (147) :

$$[IF\ A(x)\ THEN\ B(y)] \begin{matrix} OR \\ ALTFEL \end{matrix} [IF\ D(x)\ THEN\ C(y)] \tag{151}$$

unde D(x) poate fi o altă submulţime fuzzy decât $A^C(x)$. Având în vedere că, la rândul său D(x) poate să corespundă tot unei propoziţii condiţionale fuzzy, lanţul inferenţial poate fi prelungit, obţinând relaţii fuzzy de tipul

$$IF\ A_1\ THEN\ B_1\ ELSE\ IF\ A_2\ THEN\ B_2\ ELSE\ IF\ A_3 \ldots ELSE\ B_n \tag{152}$$

Dacă nu se specifică nimic, atunci, în loc de D(x), vom lua $A^C(x)$, conform relaţiei (147).

Pentru a exemplifica utilizarea relaţiei (148), să luăm un exemplu, puţin mai complex; fie mulţimile totale

$$T_1 = \{1,2,3,4,5\} \tag{153}$$
$$T_2 = \{10,20,30,40,50\} \tag{154}$$

cu elemente $x \in T_1$ şi $y \in T_2$.

Să construim matricea de apreciere a relaţiei

$$DACA\ x\ este\ mic\ ATUNCI\ y\ este\ mare\ ALTFEL\ y\ nu\ este\ foarte\ mare \tag{155}$$

Submulţimea fuzzy aferentă afirmaţiei "e este mic" ar putea fi, de exemplu

$$A(x) = \left\{\frac{1}{1}, \frac{0.8}{2}, \frac{0.6}{3}, \frac{0.4}{4}, \frac{0.2}{5}\right\} \tag{156}$$

Cum nu se specifică nimic despre submulţimea fuzzy D(x), vom aplica relaţia (147), luând $D(x)=A^C(x)$, care poate fi calculate ca mai jos

$$A^C(x) = \left\{\frac{0.2}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.8}{5}\right\} \tag{157}$$

Submulţimea fuzzy generată de afirmaţia fuzzy “y este mare” ar putea fi, de exemplu

$$B(y)=\left\{\frac{0.2}{10},\frac{0.4}{20},\frac{0.6}{30},\frac{0.8}{40},\frac{1}{50}\right\} \tag{158}$$

Pentru propoziţia fuzzy “y nu este foarte mare”, care generează submulţimea fuzzy C(y), observăm că

$$C(y)=E^{C}(y) \tag{159}$$

unde E(y) este propoziţia fuzzy “y este foarte mare”; nu cunoaştem submulţimea E(y) (generată de propoziţia fuzzy “y este foarte mare”), dar cunoaştem submulţimea fuzzy B(y) (generată de propoziţia fuzzy “y este mare”). După cum am arătat însă anterior, trecerea de la o submulţime fuzzy generaţa de o propoziţie fuzzy de tipul “y este mare”, la o submulţime fuzzy generată de o propoziţie fuzzy de tipul “y este foarte mare” corespunde unei concentrări, deci (în lipsa altor specificări) la ridicarea la puterea a doua.

$$E(y)=\left(B(y)^{2}\right) \tag{160}$$

Atunci, având relaţia (158) de definiţie a submulţimii fuzzy B(y) (corespunzătoare propoziţiei “y este mare”), putem determina submulţimea fuzzy E(y) (corespunzătoare propozitiei fuzzy “y este foarte mare”) :

$$E(y)=\left\{\frac{0.04}{10},\frac{0.16}{20},\frac{0.36}{30},\frac{0.64}{40},\frac{1}{50}\right\} \tag{161}$$

şi submulţimea fuzzy C(y) (corespunzătoare propoziţiei fuzzy “y nu este foarte mare”) :

$$C(y)=E^{C}(y)=\left\{\frac{0.96}{10}.\frac{0.84}{20},\frac{0.64}{30},\frac{0.36}{40}\right\} \tag{162}$$

Relaţia (155) va fi atunci dată de

$$\begin{aligned}&DACA\ A(x)\ ATUNCI\ B(y)\ ALTFEL\ C(y)=\\&[DACA\ A(x)\ ATUNCI\ B(y)]\ \underset{ALTFEL}{SAU}\ [DACA\ A^{C}(x)\ ATUNCI\ C(y)]\end{aligned} \tag{163}$$

cu A(x), A^C(x), B(y), C(y) date, respectic, de relaţiile (156), (157), (158) şi (162).

Să determinăm matricea M_1 de apreciere pentru relaţia condiţională fuzzy “DACĂ A(x) ATUNCI B(y)” :

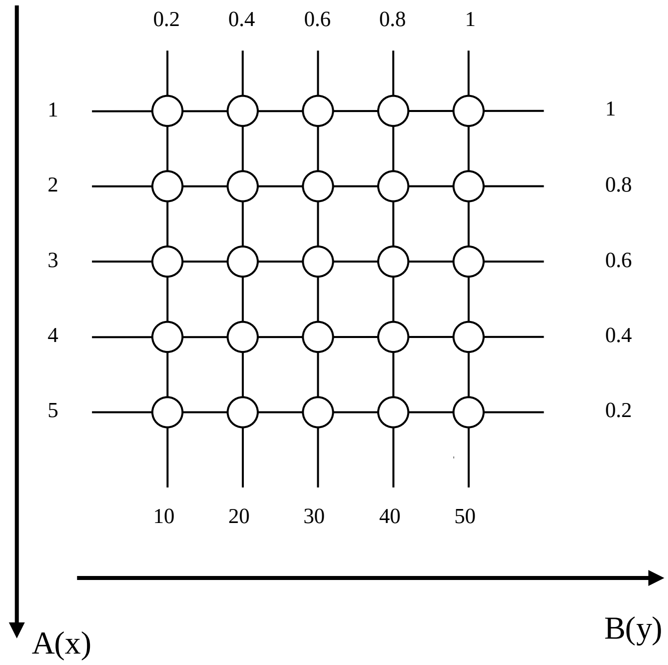


Figura 18 Produsul cartezian A×B

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \tag{164}$$

Să determinăm acum matricea M_2 de apreciere a relaţiei condiţionale fuzzy “DACĂ $A^C(x)$ ATUNCI C(y)”

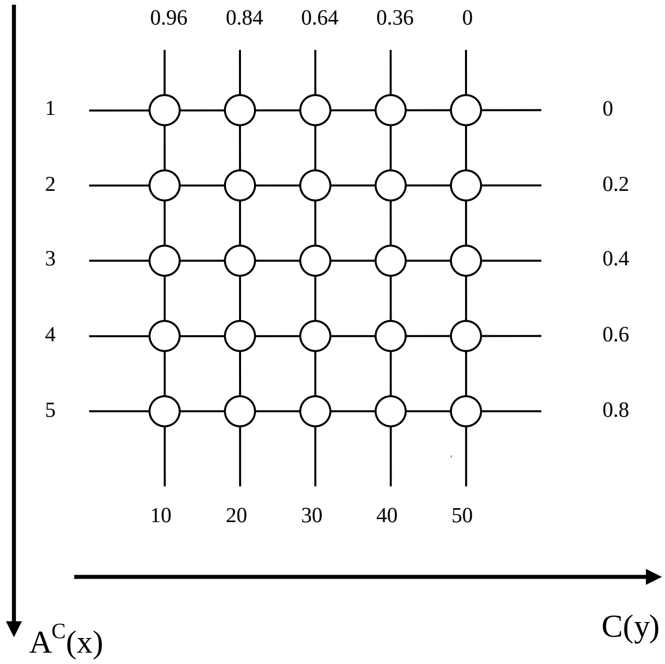


Figura 19 Produsul cartezian $A^C \times C$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.36 & 0 \\ 0.8 & 0.8 & 0.64 & 0.36 & 0 \end{bmatrix} \tag{165}$$

După cum am ştim, datorită faptului ca între cele două relaţii condiţionale fuzzy (ale căror matrice de apreciere sunt M_1 şi M_2) se face o operaţie logică SAU, matricea de apreciere M a relaţiei condiţionale fuzzy (155) va cuprinde, în fiecare poziţie, maximele dintre elementele care ocupă eceeaşi poziţie în cele două matrice de apreciere M_1şi M_2; vom obţine, ca urmare :

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.8 & 0.64 & 0.36 & 0.2 \end{bmatrix} \tag{166}$$

5. FUZZYFICARE ŞI DEFUZZYFICARE

Fuzzy-ficarea reprezintă transformarea unei valori (sau mulţimi de valori) non fuzzy într-o submulţime fuzzy, iar de-fuzzy-ficarea transformarea inversă, care conduce de la o submulţime fuzzy la o valoare care nu este fuzzy.

Fuzzyficare şi defuzzyficarea reprezintă operaţii de interfaţă între zone cu caracter de vaguitate (incertitudine, definire incompletă) şi zone care nu au acest character, ambele tipuri de zone făcând parte din ansamblul aceluiaşi system.

Pentru fuzzyficarea unei valori precise (deci a unui unicat fuzzy – “fuzzy singleton”) s se înlocuieşte unicatul cu o submulţime fuzzy aleasă în mod corespunzător, astfel ca pentru unicat să rezulte valoarea maximă posibilă (egală cu 1) a funcţiei de apartenenţă, această funcţie prezentând o simetrie a valorilor în raport cu cu unicatul, situate în axa de simetrie a funcţiei (cu excepţia cazurilor când această simetrie nu este posibilă, de exemplu atunci când unicatul se situează la unul din cele două capete extreme ale suportului mulţimii totale T).

Pentru ilustrare se consideră mulţimea totală

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \tag{167}$$

Unicatul 5 poate fi fuzzyficat prin înlocuirea cu o submulţime fuzzy, de exemplu

$$F(x) = \left\{ \frac{0.4}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0.4}{6} \right\} \tag{168}$$

denumită şi “nucleu”, în sensul că poate genera o altă submulţime fuzzy care să servească la fuzzyficare. Se remarcă faptul că, datorită simetriei funcţiei $\mu_F(x)$, ca şi a unei funcţii continui obţinute prin interpolarea acestei funcţii discrete, unicatul împarte în două zone egale ca arie suprafaţa de sub curba care reprezintă funcţia de apartenenţă (continuă) menţionată. Metoda respectivă de defuzzyficare se găseşte astfel în corespondenţă cu metoda de fuzzyficare menţionată anterior.

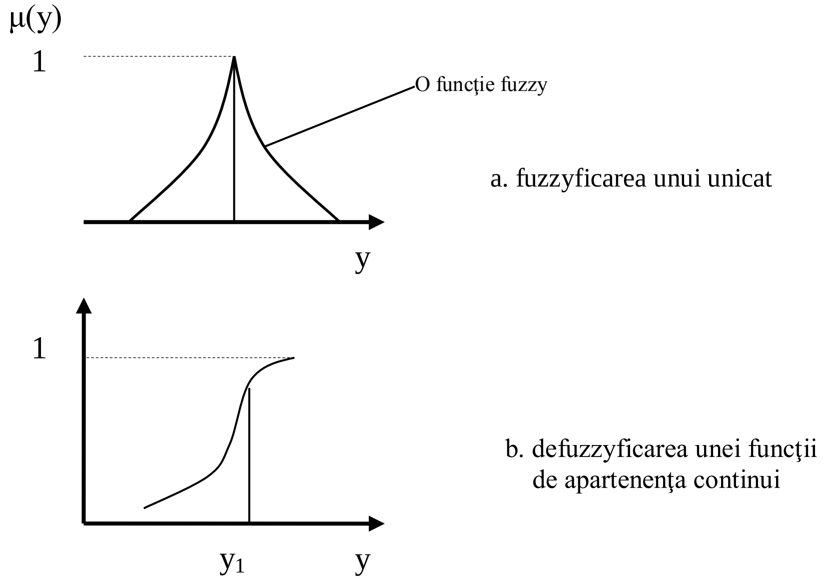


Figura 20 Fuzzyficare şi defuzzyficare

6. EXEMPLE DE UTILIZARE A MULŢIMILOR FUZZY ÎN ADOPTAREA DECIZIILOR

6.1. ADOPTAREA UNEI DECIZII MULTICRITERIALE ÎN CAZUL FABRICĂRII UNUI PRODUS

Se pune problema fabricării unui nou medicament şi există trei criterii în funcţie de care se ia decizia (în funcţie de gradul de satisfacere a acestor criterii) :

- C_1 – eficienţă cât mai ridicată;
- C_2 – efecte colaterale cât mai reduse;
- C_3 – cost cât mai redus.

Avem la dispoziţie trei variante (V_1, V_2, V_3) de realizare a medicamentului respective. Se apreciază în ce măsură fiecare variantă satisface fiecare criteriu. Aprecierea se face prin valorile funcţiei de apartenenţă. Se obţine o matrice

$$M = \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c|c|c|c} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline V_1 & \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ V_2 & \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ V_3 & \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{array}$$

Având în vedere că fiecare variantă trebuie să satisfacă toate cele trei criterii C1, C2, C_3 (mai exact ***ŞI*** C_1 ***ŞI*** C_2 ***ŞI*** C_3), rezultă că pe linii avem o operaţie logică ŞI, ceea ce conduce la concluzia că trebuiesc alese, pe fiecare linie, valorile minime ale funcţiei de apartenenţă. Trebuie să alegem apoi dintre aceste valori (***SAU*** prima, ***SAU*** a doua, ***SAU*** a treia), ceea ce ne conduce la concluzia că între cele trei variante există o operaţie logică SAU, deci vom allege maximumul dintre valorile rezultate pe linii (maximumul dintre minimele pe linii).

6.2. AUTOMATIZAREA IERARHICĂ A UNEI INSTALAŢII DE TRATARE A APELOR DE CANAL PRIN PROCESE BIOTEHNOLOGICE

Principala caracteristică a instalaţiei este folosirea unei culture de microorganisme (cultură care foloseşte chiar substanţele organice din apa de canal) activată prin intermediul oxigenului din aerul introdus în cantităţi optime într-un rezervor de aerare (RAER). Oxigenul determină creşterea microorganismelor care descompun substanţele dizolvate şi suspendate, transformându-le în substanţe care se pot elimina. Aceste substanţe iau forma unui precipitat - flocon ("activated sludge"). Aceste flocoane intră cu amestecul lichid (AL) într-un limpezitor/decantor, unde se depunla partea inferioară. La partea superioară va rămâne apa limpezită, cu foarte puţine suspensii, care trebuie să satisfacă standardele de utilizare.

Pentru a stabili un nivel de precipitat determinat, o parte din precipitat este reciclat.

Instalaţia este automatizată; automatizarea este ierarhizată pe două nivele :

- nivelul inferior – are trei echipamente de automatizare
- nivelul superior - este realizat pe baza mulţimilor fuzzy.

Nivelul inferior este reprezentat în figura 21

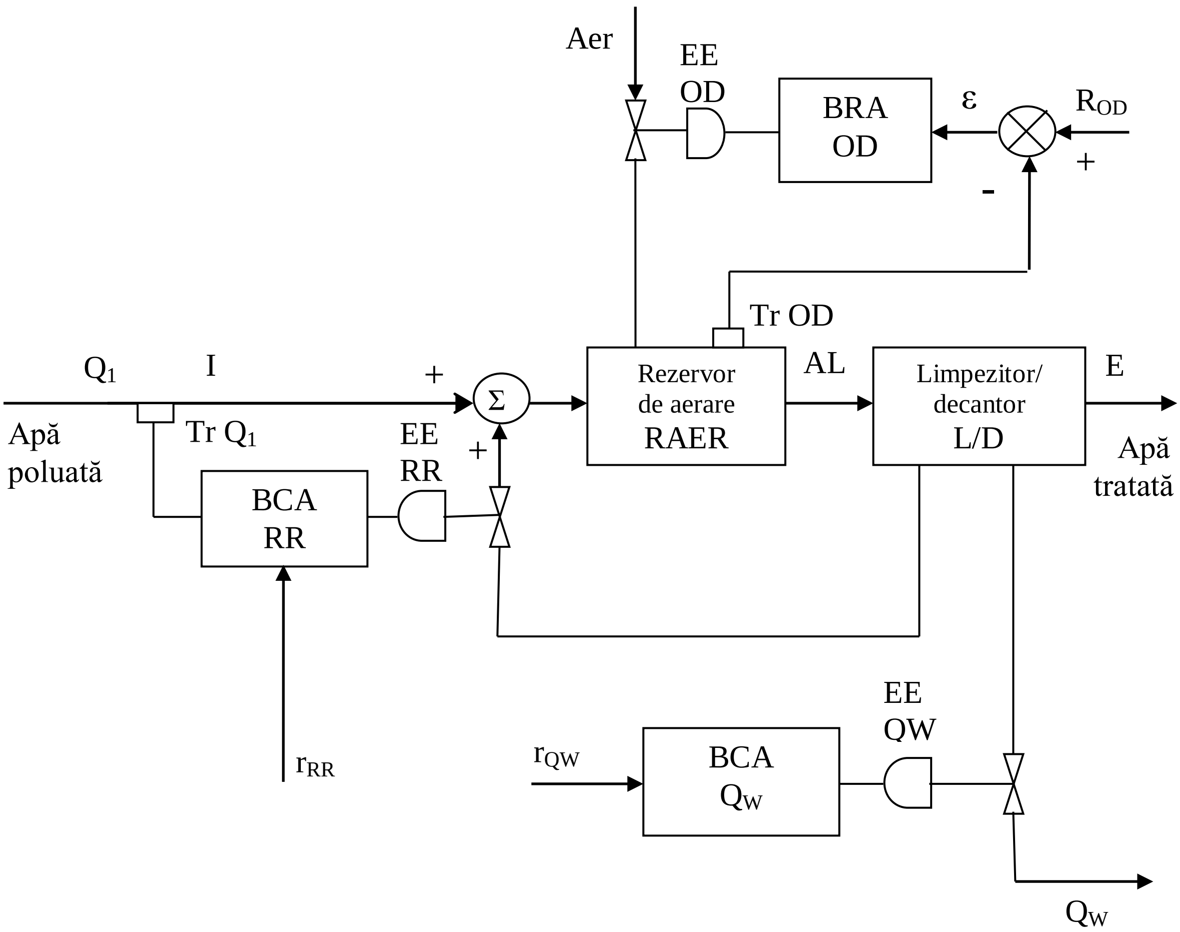


Figura 21 Nivelul inferior de automatizare

T_rQ_1	traductor de debit pentru apa de canal
T_rO_D	traductor al oxigenului dizolvat
EE R_R	element de execuţie – pentru raportul de reciclare (servomotor)
EE O_D	element de execuţie – pentru oxigenul dizolvat (pneumatic)
EE Q_W	element de execuţie – pentru precipitat (pneumatic)
BCA R_R	bloc de comandă automat – pentru raportul de reciclare
BRA O_D	bloc de reglare automată – pentru raportul de reciclare
BCA Q_W	bloc de comandă automată – pentru debitul de precipitat eliminate
r_{RR}	referinţă pentru raportul de recirculare
r_{OD}	referinţă pentru oxigenul dizolvat
r_{QW}	referinţă pentru debitul de precipitat eliminate

- Prima automatizare are cascop stabilirea raportului de reciclare; se măsoară cu T_rQ_1 debitul de intrare Q_1 (intrarea în nivelul inferior) al apei de canal; BCA R_R primeşte semnal de la T_rQ_1 şi referinţa r_{RR} pentru raportul de reciclare, impunând prin intermediul EE R_R debitul de apă cu precipitat preluat din limpezitorul/decantor L/D;
- A doua automatizare are ca scop stabilirea debitului de aer cu oxygen dizolvat necesar procesului biotehnologic; este o reglare automată, căci are reacţie negativă prin intermediul traductoruli de oxygen dizolvat T_rO_D; semnalul de eroare (referinţa pentru oxigenul dizolvat r_{OD} – semnalul de la T_rO_D) întră în BRA O_D şi, prin intermediul EE O_D, se impune debitul de aer;
- A treia automatizare are ca scop stabilirea debitului de apă cu precipitat Q_W care se elimină; BCA Q_W primeşte referinţa r_{QW} şi, prin intermediul EE Q_W, impune debitul Q_W de apă cu precipitat care se elimină.

Automatizarea la nivel inferior are ca scopuri :

- stabilirea unei anumite proporţii între Q_1 şi Q_R;
- crearea în primul rezervor RAER a unui mediu aerobic de creştere rapidă a microorganismelor prin insuflare de aer la baza rezervorului de aerare;
- evacuarea excesului de precipitat (de cultură solidă) prin Q_W.

Automatizarea de la nivelul superior modifică, pentru cele trei automatizari de la nivelul inferior, valorile mărimilor de referinţă r_{RR}, r_{OD}, r_{QW}, astfel ca pe tot ansamblul să se obţinăun optim, în funcţie de anumite criterii. Deci automatizarea de la nivelul ierarhic superior coordonează automatizarea de la nivelul ierarhic inferior.

Scopurile principale ale automatizării de la nivelul ierarhic superior sunt :

- să asigure o cerere totală de oxygen în anumite limite;
- materialele existente încă în suspensie în ieşirea E să nu depăşească standardele fixate.

Automatizarea de la nivelul ierarhic superior încorporează experienţa managerului (operatorului uman), care a coordonat multă vreme o astfel de instalaţie. Această automatizare trebuie să păstreze nealterate performanţele sistemului în ansamblu, în pofida perturbărilor care apar. Cele mai importante perturbări sunt :

- modificarea debitului de intrare Q_1;
- fluctuaţii ale suspensiilor şi substanţelor dizolvate.

Caliatea intrării poate suferi modificări importante, care provoacă alterări importante ale funcţionării şi anume :

- “bluking sludge” – floconul mult mărit
- “rising sludge” – precipitatul care se ridică.